Petri Philomeni de Dacia

in

ALGORISMUM VULGAREM JOHANNIS DE SACROBOSCO

COMMENTARIUS.

UNA CUM ALGORISMO IPSO EDIDIT

ET PRAEFATUS EST

MAXIMILIANUS CURTZE,
PROFESSOR THORUNIENSIS.

SUMPTIBUS SOCIETATIS REGIAE SCIENTIARUM DANICAE.

HAUNIAE MDCCCXCVII.
PROSTAT APUD A. F. HØST & FIL. BIBLIOP. REG.
TYPIS BIANCI LUNO TYPOGR. REG. (F. DREYER).

CAJORI

EINLEITUNG.

Im zweiten Bande seiner *„Vorlesungen über Geschichte der Mathematik“* schreibt M. Cantor in Bezug auf den Algorismus des Johannes de Sacrobosco Folgendes [1]): *„Eine nicht viel andere „Rolle* (als der *Tractatus sphaerae* in der Astronomie) *spielt „Sacrobosco's Lehrbuch der Rechenkunst, tractatus de arte „numerandi. Es ist eine Sammlung von Regeln ohne den ge„ringsten Beweis, ohne Zahlenbeispiele, ohne Erwähnung einer „Quelle, aus welcher der Verfasser schöpfte. Aber in dieser „Nüchternheit, in dieser Kürze eignete es sich vortrefflich dazu, „den Grundriss zu einem die zahlreichen Lücken mündlich „ergänzenden Unterrichte zu bilden, und wurde es auch Jahr„hunderte lang in solcher Weise benutzt. Ob darum die eben „bezeichneten Lücken wirklich ausgefüllt wurden? Wir bezwei„feln es. Die grosse Menge der Lernenden wie nicht minder „der Lehrenden begnügte sich gern mit dem Handwerk des „Rechnens, ohne auf die Wissenschaftlichkeit des Algorismus „demonstratus* (des Jordanus Nemorarius) *Ansprüche zu erheben, „und der dauernde Einfluss des* Jordanus *beschränkt sich zunächst „ausdrücklich auf das Rechenhandwerk.“* Dass eine Arbeit über den Algorismus des Sacrobosco sich erhalten hatte, wussten wir aus den Untersuchungen G. Eneströms über Petrus de Dacia [2]).

[1]) *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik von* Moritz Cantor. *Zweiter Band. Von 1200—1668.* Leipzig, Teubner, 1892, S. 80—81.

[2]) *Anteckningar om matematikern Petrus de Dacia och hans skrifter. Af* Gustaf Eneström. *(Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens*

Durch die Liberalität der Direktion der Königl. Hof- und Staatsbibliothek zu München wurde uns der *Codex latinus Monacensis 11067* auf längere Zeit anvertraut, welcher neben dem *Algorismus des* Sacrobosco im unmittelbaren Anschlusse daran auch den *Commentar des* Petrus de Dacia enthält. Eine genaue Prüfung ergab nun, dass durch diese Arbeit gerade das klargelegt wird, was in dem obigen Abschnitte aus Cantors *Vorlesungen* als fraglich hingestellt wurde. Wenn man den Commentar des Petrus de Dacia gelesen hat, so sieht man sofort, dass er für den Universitätsunterricht verfasst ist, und dass der Zuhörer den Text des Sacrobosco in den Händen haben musste, um dem Vortrage folgen zu können. Dasselbe gilt natürlich auch, und vielleicht in noch höherem Masse, für unsere Zeit, und so war nicht abzuweisen, dass wir dem Abdrucke des Commentars den

Förhandlingar 1885, S. 15—27; 65—70; 1886, S. 57—60). Darin weist Eneström 5 Handschriften des Commentars nach. Zur Ergänzung erwähne ich noch folgender, von denen eine direkt dem Sacrobosco selbst zugeschrieben wird, was nach dem Wortlaute des Commentars natürlich absolut ausgeschlossen ist. I. *Codex Amplonianus Fol. 394*[20], Blatt 148—154[1]. *Optimum commentum super Algorismum de Integris* (Anfang des XIV. Jahrh.). — II. *Codex Amplonianus Quart. 369*[27], Blatt 152—163. *Expositio algorismi valde bona.* Auch hier geht der Algorismus des Sacrobosco voraus (1. Hälfte des XIV. Jahrh.). — III. *Codex Amplonianus Quart. 234*[12], Blatt 123—137. *Commentum proprium Johannis de Sacrobosco super algorismum de integris*, doch ist aus den Anfangsworten: »*Omnia quae a primaeva etc. In hoc tractatu determinatur de arte numerandi*« sicher, dass der Commentar des Petrus vorliegt. — IV. *Codex Lipsiensis Univers. 1470*, Blatt 433—444[1] (XV. Jahrh.). — V. *Codex Salzburgensis IX. 14*, Blatt 93—115 (von 1431). — Die Handschrift Nr. III, aus dem Anfange des XIV. Jahrhunderts, zeigt deutlich, wie wenig man oftmals von den Angaben zu halten hat, welche in denselben über die Verfasser bestimmter Abhandlungen gemacht sind. Hier wird noch bei Lebzeiten des wirklichen Verfassers die Abhandlung um mindestens 50 Jahre zurückdatiert. Sollte es nicht ähnlich mit den beiden Handschriften der *Geometria speculativa* des Bradwardin geschehen sein, welche, und nur sie allein unter den massenhaften, welche bekannt sind, Petrus de Dacia als Verfasser bezeichnen? Auf zwei ähnliche falsche Autorangaben hat mich neuerdings Paul Tannery aufmerksam gemacht und dabei speciell auf die Unzuverlässigkeit vieler solcher Titel hingewiesen.

des Algorismus selbst vorausgehen lassen, da jedenfalls die Incunabelausgabe, Strasburg 1486, sowie die am Anfange des XVI. Jahrhunderts oftmals erschienenen Texte[1]) nur wenigen zu Gesicht gekommen sein dürften, aber auch der Abdruck in Halliwells *Rara mathematica*[2]) zu den Seltenheiten der Litteratur gehört. Es war dies um so unbedenklicher, als derselbe nur wenige Seiten erfordert. Wir waren dabei in der glücklichen Lage ausser dem recht schlechten Texte Halliwells einmal das Exemplar benutzen zu können, das dem Commentar des Petrus de Dacia im *Clm 11067* vorausgeht, dann aber auch den *Clm 14684*, welcher dem XIII. Jahrhundert angehört[3]), und alle diejenigen Ergänzungen ebenfalls enthält, welche im *Clm 11067* gegen den Text Halliwells sich finden, und welche durch den Commentar als zur Zeit desselben, Ende des XIII. Jahrhunderts, vorhanden nachgewiesen werden können. Eine wie weite Ver-

[1]) Von dem *Algorismus* des Sacrobosco sind folgenden Ausgaben bekannt, von denen ich die Titel der beiden ersten, da sie sogenannte Incunabeln sind, vollständig mittheile: Blatt 1r: Cōpotus manua | lis magri aniani †| metricus cū ɔmēto | Et algorifmus. Blatt XLIIIIr: Impreffum Argn̄. per Iohāmem (!) pryfz, | Anno domini. 1488. 18. Kalł. decembris. — Fol. XLVr: Incipit textus algorifmi. — Fol. LIIIr: Et hoc de radicum extractione | dictū sufficiat iā in numeris quadratis qȝ in numeris cu|bicis. | Et sic est finis. | Fol. 53v: Perutilis ac subtilis algorifmi prac|tica. — Fol. 55: Sequitur tabula. 56 Blätter, davon das letzte leer. — 2) Algorifmus Domini Ioā nis de Sacro Busco | nouiter impreffū | Cum Gratia Et Privilegio. Am Ende: Impreffum Venetijs per Bernardinum Venetum | De Vitalibus: Anno Dn̄i. M. CCCCC. I. | Die Tertio Men. Februarij. Weitere Ausgaben sind: *Paris 1503*, herausgegeben von Clichtoveus; *Paris 1510*, Neudruck der vorhergehenden Ausgabe; *Wien 1517; Krakau 1521; Krakau 1522; Paris 1522; Venedig 1523; Antwerpen 1582* (Letztere als Anhang zu der *Sphaera* des Sacrobosco).

[2]) *Rara mathematica; Or, a collection of treatises on the mathematics and subjects connected with them, from ancient inedited Manuscripts. Edited by James Orchard Halliwell. London 1839* und *The second edition. London 1841*, S. 1—26. Der Abdruck ist nach einer recht schlechten Handschrift bewirkt.

[3]) In diesem Codex ist der Algorismus anonym, was man nach dem gedruckten Kataloge nicht annehmen würde. Er hat die Unterschrift: „*Explicit algorismus sive arismetrica practica*“.

breitung das Werk des Sacrobosco als Lehrbuch im Mittelalter hatte, lässt sich aus der ungemein grossen Zahl von erhaltenen Handschriften desselben ersehen, welche vom XIII. bis zum XVI. Jahrhundert sich erstrecken. So besitzt z. B. die Königl. Hof- und Staatsbibliothek zu München deren 20, davon 2 aus dem XIII., 8 aus dem XIV., 10 aus dem XV. Jahrhundert; die k. k. Hofbibliothek zu Wien enthält 12 solcher Handschriften, davon je 1 aus dem XIII. und XVI., 2 aus dem XIV., 8 aus dem XV. Jahrhundert; in der Amploniana zu Erfurt finden wir 13 Exemplare, davon 4 aus dem XIII., 6 aus dem XIV., eine aus der Wende des XIV. und XV., und 2 aus dem XV. Jahrhundert. Eine derselben hat den ausdrücklichen Zusatz *„ad usum Parisiensem"*. Halliwell führt aus englischen Bibliotheken 9 Handschriften auf, denen sich allein aus dem Coxe'schen Katalog der College-Bibliotheken zu Oxford noch 10 weiter anreihen liessen. Es giebt natürlich noch eine bei weitem grössere Zahl; so besass z. B. Fürst Boncompagni allein 4 Handschriften desselben. Den Text des Commentars lassen wir, wie gesagt, nach *Codex latinus Monacensis 11067 (Pass. 67)* Blatt 142—159 abdrucken. Dieser ganze Codex ist von einer Hand, und zwar der eines gewissen Theodoricus Ruffi geschrieben; eine Beschreibung desselben gebe ich in Anmerkung [1]). In dieser Handschrift

[1]) Der *Codex latinus Monacensis 11067 (Pass. 67)* ist eine Quarthandschrift auf Papier von Anfang bis zu Ende von ein und derselben Hand zweispaltig geschrieben. Sie umfasst ein Vorblatt, 208 gezeichnete Blätter und ein Nachblatt, jedoch sind die Blätter 97—110 von Anfang an nicht mit eingebunden worden, und fehlen daher gänzlich. Blatt 1^r enthält ein Inhaltsverzeichnis aus der Zeit der Handschrift, doch ist dasselbe nicht vollständig. Die einzelnen Abhandlungen sind folgende. 1) Blatt 2^r—56^v: *Incipit Compilatio* Leupoldi ducatus Austrie filius (!) *de astrorum scientia — Explicit ..... Anno dni. Millẽo. CCCC° XLVI.* — 2) Blatt 56^v—59^r: *Incipiunt flores seu propositiones centum dni.* Hermetis *notabiles.* — 3) Blatt 59^r—60^r: *Sequitur registrum super propositiones* Hermetis. — 4) Blatt 60^r—63^r: *Sequitur astrologia* Almansoris *et eius propositiones seu iudicia.* Am Schlusse: *Perfectus est liber capitulorum* Almansoris *cum deo auxilio translatus de arabico in latinum a*

beginnt unser Commentar mit der Ueberschrift *„Incipit commentum magistri* Petri de Dacia, *bono compotista (!) in villa „Parisiensi, super textum algorismi etc*a*"*, und schliesst: *„Expli-*

Platone Tyburtino *anno arabum 530. Scriptus anno Christi 1446* u. s. w. — 5) Darunter steht folgende Notiz: *Nota 15 gradus thauri est ascensus hora fundationis civitatis Susatensis, Aries Colonie et Missie, Thaurus Monasterii, Aquarius Paderborne, Scorpio Werle.* — 6) Blatt 63r — 64v: *Registrum super propositiones* Almansoris. — 7) Blatt 64v — 66r: *Incipit tractatus de iudiciis particularibus pertinens ad medicos.* Am Ende: *Explicit parva et generalis introductio ad iudicia astronomie quantum pertinet ad medicum introducendum* ..... Arnoldi de nova villa *Conscriptum* ..... *Anno dni Millo. CCCC°XLVII.* — 8) Blatt 66r u. v: *De egrotantibus et quid eis accidat.* Alkindus. — 9) Blatt 66v — 69v: *Incipit tractatus de iudiciis urinae non visae secundum considerationem astrologyce scientie.* — 10) Blatt 69r — 72r: *Incipit liber* Ypocratis *de egritudinibus.* — 11) Blatt 72v: Notiz *de evacuatione humorum.* — 12) Blatt 73r — 81v: *Incipit tractatus de pronosticatione aëris, et quid accidat de pluviis, ventis et tonitruis et de pestilentia.* — 13) Blatt 81v: *Iudicia particularia impeduntur ab universalibus octo modis.* — Blatt 82r — 84v sind ausgeschnitten. — 14) Blatt 85r beginnt unvollständig: *rubescunt nubes et ferocitatem futuri diei spondent.* Am Ende (Blatt 86r): *Explicit tractatus de presagiis tempestatum.* — 15) Blatt 86r — 94r: *Incipit* Alkindus *de impressionibus aëris.* — 16) Blatt 94r — 96v: *Item tractatus de ymbribus.* — 17) Blatt 96r: *Incipit liber de permutatione temporis et pluriorum* Iaphar *philosophi egyptii astrologi. Sed deficit prologus.* Nur ein kurzer Bruchstück vorhanden. — Blatt 97—110 fehlen. — 18) Blatt 111r — 118r: *Liber florum* Albumasar, so das Inhaltsverzeichnis, nach welchem der Tractat auf Blatt 109 angefangen hatte. Beginnt mit: *accident impedimentum in fluminibus.* Am Ende: *Expliciunt flores* Albumazar *de revolutionibus annorum, qui interpretatur* pater familias. *Completus anno Dni. M°CCCC°XL6*(!) u. s. w. — 19) Blatt 118v — 119r: *De gravitate vel levitate precij venalium per singulos menses* Dorotheus *etc.* — 20) Blatt 120r — 122r: *Iudicia caristie.* — 21) Blatt 123r — 134v: *Incipit tractatus* Haly Habenragel *de electionibus.* Schliesst ohne richtiges Ende mit der Ueberschrift eines neuen Paragraphen. — 22) Blatt 135r — 142r: *Algorismus vulgaris* des Sacrobosco. — 23) Blatt 142v — 159r: *Commentum* Petri de Dacia *super Algorismum.* — 24) Blatt 159v — 160r: *Incipit Algorismus minutiarum,* behandelt nur 60theilige Brüche. — 25) Blatt 160r — 166r: *Item incipit algorismus de minutiis magistri* Iohannis de Lineriis. — 26) Blatt 166r: *Figura pro specie multiplicationis et divisionis,* d. i. das Einmaleins von 1—9 in quadratischer Anordnung. — 27) Blatt 166r: *Per cancellos multiplicare,* Beispiel der schachbrettartigen Multiplica-

„*cit scriptum super algorismum editum a magistro* Petro Daco, „*bono compotista in villa Parisiensi, et conscriptum per me* „*fratrem* Theodoricum ruffi *ordinis fratrum minorum in Gro-*

---

tion von 4567 × 3456 nebst Erläuterung. — 28) Blatt 166ᵛ: *Einmaleinstabelle* in anderer Anordnung als vorher. — Blatt 167—173 sind leer. — 29) Blatt 174ʳ—176ʳ: *Instrumentum de distantiis civitatum et regnorum et dicitur cosmographia.* Anleitung eine Weltkarte zu entwerfen. Dazu gehört eine *Tabula regionum et civitatum.* Für diese heisst es in der Erläuterung: „*Et notandum, quod in praesenti tabula quilibet gradus et hora dividitur in 100 minuta, et quodlibet minutum in 100 secunda et sic de aliis.*" Gewiss eine geschichtlich höchst beachtenswerthe Bemerkung. — 30) Blatt 176ᵛ—180ʳ: *Canon pro horologiis in plano vel in pariete.* — 31) Blatt 180ᵛ—182ᵛ: *Canones de compositione equatorii planetarum.* — 32) Blatt 183ʳ—184ʳ: *Canones pro practica equatorii.* — 33) Blatt 184ʳ—186ʳ: *Sequitur instrumentum* Campani *de equationibus planetarum.* — 34) Blatt 186ʳ—187ᵛ: *Incipit canon de compositione equatorii pro coniunctione et oppositione solis et lune.* — 35) Blatt 188ʳ—194ʳ: *Compositio quadrantis cum eius utilitatibus.* — 36) Blatt 194ᵛ—196ʳ: *Item compositio eiusdem quadrantis sub aliis litteris alphabeti prout figure demonstrant.* — 37) Blatt 196ʳ u. ᵛ: *Ad compositionem horologii Achab fiat dimidius circulus.* — 38) Blatt 196ᵛ—197ᵛ: *Compositio spere.* — 39) Blatt 197ᵛ—198ʳ: *Nachträgliche Zusätze* zu dieser Abhandlung von derselben Hand, aber in flüchtigerer Schrift. — 40) Blatt 198ᵛ—199ʳ: *Ista figura demonstrat creationem rerum omnium tam superiorum quam inferiorum, insuper et situm uniuscuiusque secundum exigentiam meriti sui vel demeriti.* Der Text deutsch. Am Schlusse: *Dusse figuren had meyster Iohannes Gemunde von Wyne vnd och die scole der heyligen scrift gemakt alse sie dy bestediget han tho sinte stephan czu Wyne &cª.* Die Figur fehlt. Eine höchst wundersame Schrift. — 41) Blatt 199ᵛ: *Tabula ad latitudinem 12 horarum equalium ad 51 gradus elevationis pro horologio.* — 42) Blatt 200ʳ—201ʳ: *Tractatus de compositione chilindri* (Iohannis de Gamundia). — Blatt 201ᵛ—204ᵛ: *Incipit Arismetrica* (lies: *Ars metrica*) *de arte mensurandi altitudines et profunditates et latitudines seu longitudines.* Am Schlusse: *Explicit tractatus de mensurationibus in profundo et plano.* Eine sehr viel verbreitete Abhandlung. — 44) Blatt 205ʳ—206ᵛ: *Consequenter incipit 2ª pars utilitatis quadrantis.* Am Schlusse: *Explicit secunda pars quadrantis Ruperti Linconiensis Anno dni. M° CCCC° 50(!) in vigilia cathedre Petri hora 4ª post meridiem.* Die Abhandlung ist jedoch identisch mit dem zweiten Theile des *Quadrans cum cursore* des Robertus Anglicus, eines Arztes zu Montpellier um die Mitte des XIII. Jahrhunderts, der auch vielfach unter dem Namen eines Iohannes Anglicus in Monte oder Iohannes de Montepessulano vorkommt,

„nenberch ibidem lectorem conventus Anno dni. Millesimo „CCCC°XLVIII. Decima nona die Februarii etc^a“. Das Explicit des Algorismus selbst ist auch nicht ohne Interesse; ich lasse es deshalb ebenfalls hier folgen: *„Explicit algorismus, „quem quidam philosophus* Algus *primitus invenit, sed* Iohannes *„de* Sacro Busco *considerans arismetricam a* Boetio *et ab aliis „arismetricis nimis late et diffuse seu confuse traditam hunc „tractatum de graeco in latinum transtulit et sub compendio „collegit. Scriptum per me ..... Anno Dni. M°CCCC°XLV, „tertia die mensis septembris“.* Der von einem Araber griechisch verfasste Text des Algorismus ist also danach von Iohannes von Sacrobosco in Lateinische übersetzt worden! Für die definitive Constitution des Textes bin ich Herrn Professor M. C. Gertz in Kopenhagen zu grössestem Danke verpflichtet. Er hat denselben einer genauen philologischen und sachlichen Durchsicht unterzogen und mir die Resultate derselben gütigst mitgetheilt. Es drängt mich, diesen Dank hier öffentlich auch an dieser Stelle zum Ausdrucke zu bringen. Viele seiner Emendationen wurden durch den im *Clm 14401, Blatt 169—179* befindlichen dem XIV. Jahrhundert angehörenden Text des Commentars [1]) einfach

und welcher, aus Unkenntnis der Abschreiber, sehr häufig mit Robert von Lincoln verwechselt wird. Dieser *Quadrans* wird demnächst nebst einer mittelalterlichen griechischen Uebersetzung von Paul Tannery herausgegeben werden. Eine deutsche Uebersetzung aus dem Jahre 1477 fand ich im *Codex germanicus Monacensis 328*, eine englische findet sich in den *Rara Mathematica* von Halliwell abgedruckt (p. 56—71). — 45) Blatt 206^v—207^r: *Compositio scale alchimetra* etc. d. i. das zum Feldmessen gebrauchte geometrische Quadrat auf dem Quadranten. — 46) Blatt 207^r: *De baculo geometrico. Ad conficiendum baculum geometricum alias baculum Iacob* u. s. w. — 47) Blatt 207^r—208^r: *De arte visoria.*

[1]) Ueber diese Handschrift sehe man Eneström, *a. a. O.* Die von ihm als *1290, id est* u. s. w. gelesene Jahreszahl ist jedoch zu lesen: *12901*, d. h. *1291*. Der Abschreiber hatte das Schreiben der Zahlen noch nicht begriffen, und so entstand dieses Monstrum von Zahl. Schreibt doch Theodoricus Ruffi noch, wie in der vorigen Anmerkung zu lesen *MCCCC50* für *1450* und *MCCCCXL6* für *1446*, und hatten doch beide

bestätigt. Die gegen den Text des *Clm 11067* vorgenommenen Einschiebungen sind durch ⟨ ⟩ Klammern kenntlich gemacht, dagegen sind die durch Doppel -, beziehungsweise Falschlesungen des Abschreibers eingefügten Stücke im Texte selbst weggelassen worden. Da nach *Clm 14401* der Commentar im Jahre 1291 am letzten Juli vollendet ist, so dürfte der im Jahre 1327 zum Rektor der Pariser Universität gewählte Petrus de Dacia, *Canonicus Ripensis*[1]), kaum mit unserem Petrus identisch sein können. Da der Letztere Petrus Philomeni de Dacia genannt wird, der Rektor der Pariser Universität aber entweder Petrus Strangonis oder Petrus Winter de Dacia gewesen sein muss, welche sich damals beide in Paris aufhielten[2]), so dürfte auch dieses gegen die von Eneström angenommene Identität sprechen.

Der Commentar des Petrus zerlegt zunächst in echt scholastischer Weise den Text des Algorismus, und zwar zuerst die Einleitung und darauf jedes einzelne Capitel in die darin enthaltenen Unterabtheilungen, giebt für jede derselben die etwa nöthigen Erläuterungen, sowohl Wort- als sachliche Erklärungen, und schliesst jedes Capitel damit, ein genau durchgeführtes, jede Nuance der Rechnung berücksichtigendes Exempel so durchzuführen, dass man die einzelnen Phasen derselben genau übersehen kann. Die Rechnung selbst hat man sich auf dem Staubbrett, dem *Abacus,* ausgeführt zu denken. Die nicht mehr gebrauchten oder während der Rechnung veränderten Ziffern werden wirklich weggelöscht, so dass am Ende der Rechnung

---

Schreiber die Anleitung des Sacrobosco und des Petrus de Dacia vor Augen!

[1]) Denifle et Chatelain, *Chartularium Universitatis Parisiensis II,* S. 300, Nr. 863: *Magister Petrus de Dacia, rector Universitatis Parisiensis, canonicos Parisienses in consortium Universitatis restituit. 1327, Martii 22 [Parisiis]: Anno Domini MCCCXXVI, die martis proxima ante festum beati Thome apostoli electus fuit magister Petrus de Dacia, Canonicus Ripensis, tempore hyemali in rectorem* u. s. w.

[2]) Im *Auctarium* Sp. 16, Z. 4 liest man aus dem Jahre 1533, 5. Februar: *Petrus Strangonis de Dacia,* und ebendaselbst: *Petrus dictus Winter de Dacia.*

nur noch das Resultat, nicht aber die der Aufgabe zu Grunde liegenden Zahlen vorhanden sind. Das später sich daraus entwickelnde Rechnen auf Papier unter Durchstreichung der benutzten Ziffern und Ueberschreibung der an ihre Stelle tretenden hat PETRUS noch nicht gebraucht. Diese Art der Rechnung hat ihren Ausgangspunkt in Italien und kommt zuerst in Kaufmannskreisen vor, während wir hier ein akademisches Compendium vor uns haben. Wer die Erläuterungen und das jedesmalige Exempel wirklich durchgearbeitet hatte, das heisst, wer den Vorlesungen wirklich gefolgt war, musste den Mechanismus des Rechnens nicht nur selbst in sich aufgenommen haben, es mussten ihm auch die Gründe klar geworden sein, weshalb gerade so und nicht anders gerechnet wurde. Wenn die Vorlesungen über den *Algorismus de integris*, die, wie wir nach den Verzeichnissen wissen, an allen Universitäten gehalten wurden, in ähnlicher Weise durchgeführt sind, so dürften die Zuhörer mit wirklichem Nutzen daraus hervorgegangen sein. Ich möchte dabei erwähnen, dass ich auf einer mit Unterstützung der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin unternommenen Studienreise durch die Bibliotheken Deutschlands und Oesterreichs auch eine ganze Zahl anderer Commentare zu dem *Algorismus* SACROBOSCO's aufgefunden habe, welche nicht dem PETRUS DE DACIA angehören, obwohl sie, sämmtlich später als dieser, oft die Abhängigkeit von dessen Commentar deutlich durchblicken lassen. So enthalten z. B. alle die unten erwähnte Notiz über den Namen *Teca* für Null, wenn auch mehr oder weniger abgeändert[1]), und die in dem Capitel *de radicum extractione* eingefügte Figur über die mittlern Proportionalen genau wie bei PETRUS.

[1]) So heisst dieselbe z. B. im *Codex latinus Monacensis 4774*, Blatt 222v: *„Sciendum quod cyfra habet diversa nomina; primo dicitur theca, „et theca dicitur ferrum rotundum, cum quo olim latrones signabantur „in fronte vel in maxillis, et quia illud ferrum erat rotundum ut „cyfra, ideo dictum theca. Et illud ferrum alio nomine dicitur cautherium.“*

Die Anfangsworte des ganzen Algorismus führt der Verfasser des Commentars richtig auf die Arithmetik des Boetius zurück, ebenso den zweiten Satz: *„Et quemadmodum sunt, sic cognosci „habent“*, auf Aristoteles, von ihm Aristotiles genannt, Buch II der Metaphysik. Aus der von ihm vollständiger als durch Sacrobosco selbst angeführten Stelle des Boetius schliesst der Verfasser, dass vorzugsweise für Zwecke der Astronomie die Rechnung überhaupt erfunden und weiter ausgebildet sei. Die Entstehung des Zifferrechnens legt er sich so zurecht. Ein arabischer Philosoph Algus habe das Ganze erfunden, dann aber habe der Lateiner Sacrobosco nach dem Vorbilde jenes Arabers den vorliegenden Tractat verfasst. Auch bei der Erläuterung der Zahlenerklärung des Sacrobosco citiert Petrus wieder Aristoteles *(Lib. I de anima)* und die Metaphysik des Avicenna. Aus einer Stelle des Commentars geht auch hervor, das Petrus die Erfindung der Ziffern durch die Inder bewusst war.

In Eneströms *Bibliotheca Mathematica* hat Hunrath [1]) die Frage aufgeworfen, woher der von Sacrobosco angeführte Name *Teca* für Null, in den Handschriften auch *Theca* oder *Theta* geschrieben, stamme. Da anfangs die Null θ oder ϴ geschrieben wurde, so haben viele an das griechische Theta gedacht; unser Verfasser belehrt uns eines Bessern. *Teca* heisse das kreisförmige Eisen, mit welchem das Brandmal, welches in einigen Gegenden Dieben und Räubern auf die Stirne oder den Kinnbacken eingebrannt zu werden pflege, hervorgebracht werde. Wegen der Aehnlichkeit der Gestalt der Null mit diesem Brandeisen sei der Name gekommen [2]). Auch für *Cyfra* hat er sich

---

[1]) *Bibliotheca Mathematica. Neue Folge I,* 1887, *Anfrage* 18, S. 120.

[2]) Im *Codex lat. Monac. 13021 (Rat. civ. 21)* befindet sich eine Abhandlung über Astronomie aus dem XII. Jahrhundert. In dieser werden eine sehr grosse Zahl von Tabellen mitgetheilt, und hier findet man sehr häufig, untermischt mit dem Zeichen 0, für Null ein deutliches *t* gesetzt, genau so geschrieben, wie dasselbe im Texte benutzt ist. Dieses *t* dürfte wohl unzweifelhaft die Abkürzung für die von Sacrobosco und Petrus de Dacia bezeugte Benennung *teca* für Null sein sollen.

einen Erklärungsgrund zurechtgelegt. Dieses Wort sei eine Zusammenziehung aus *circumfacta* oder *circumferenda* und bedeute, im Gegensatze zu *circulus*, den Kreis ohne Rücksicht auf den Mittelpunkt. Auf die Zehnzahl der Zahlzeichen sei Algus gekommen, weil er gesehen habe, dass die Zahlennamen immer nach Zehnern fortschreiten, was schon der Philosoph — es ist an erster Stelle Platon, an zweiter Aristoteles gemeint — im dritten Buche der Physik im *Capitulum de infinito* ausgesprochen habe [1]). Dass man die kleinere Zahl rechts die grössere links sowohl schreibe als lese, habe seinen Grund darin, dass die Araber, die Erfinder des Ziffernrechnens, in dieser Weise, d. h. von rechts nach links, sowohl schreiben als lesen. Bei ihnen sowohl, wie bei allen barbarischen Völkern, zu denen er speciell die Deutschen und Engländer zählt, würde die kleinere Zahl stets vor der grössern ausgesprochen, von den Lateinern aber, den Griechen und allen damit sprachlich verwandten Völkern umgekehrt die grössere Zahl vor der kleinern. Aber auch bei den letzteren Völkern sei für 11, 12, 13, 14, 15, 16, jedoch nur für diese sechs, eine Ausnahme zu constatieren, da für diese sechs stets die Einer vor den Zehnern ausgesprochen würden. Das hänge damit zusammen, dass einmal der Ursprung und die *Vervollkommnung* der Zahlenschreibung und Lesung von den Arabern stamme, und dass deshalb die Lateiner u. s. w. diese Lesung bis zur ersten *vollkommenen* Zahl, d. h. bis zur 6, übernommen hätten. Es sei also jedenfalls falsch, wie einige zu thun gewohnt sein, *septemdecim* oder *octodecim* zu lesen, es müsse hier immer *decem et septem*, *decem et octo* gelesen

---

Bemerkenswerth in dieser Abhandlung ist auch die Form ⊢ für 3, welche darin fast ausnahmslos auch im Texte benutzt wird, und welche für das XII. Jahrhundert so charakteristisch ist, dass man aus ihrer Benutzung sicher auf das XII. Jahrhundert als das der Entstehung der betreffenden Handschrift schliessen darf.

[1]) M. s. die *Berliner Ausgabe des Aristoteles* p. 206^b, l. 32: *μέχρι γὰρ δεκάδος ποιεῖ τὸν ἀριθμόν.*

werden. Interessant dürfte wohl auch das Wort *lingwaggio* für Sprache sein.

Einen bedeutsamen Fortschritt gegen den Algorismus des Sacrobosco dürfen wir jedenfalls darin erkennen, dass Petrus stets für das Wort *Cyfra,* das Sacrobosco ausschliesslich benutzt, das Zeichen 0 setzt, anfangs in der Art, dass er dem Worte das Zeichen folgen lässt: *cyfra* 0, dann jedoch in spätern Stellen, mit fast verschwindenden Ausnahmen, nur das Zeichen; dass er überhaupt so vielfach als möglich die Ziffern benutzt. Bei Sacrobosco werden solche einzig und allein in dem Abschnitte *Progressio* gebraucht. Auch die Neunerprobe bringt Petrus bei allen Species zur Anwendung ausser der von Sacrobosco vorgeschlagenen durch Umkehrung der Operation. Petrus kennt freilich die Fehlerquellen, welche sich bei Anwendung derselben durch Weglassen oder Zuvielberechnen von je 9 Einheiten ergeben, und räth deshalb zur Sicherheit die Probe noch mit einer andern Zahl, z. B. 8, zu wiederholen. Die Neunerprobe beruhe auf dem Grundsatze: Gleiches von Gleichem giebt Gleiches.

Von den bei der Multiplication durch Sacrobosco aufgestellten sechs Regeln lässt unser Verfasser nur die erste als selbständig gelten; alle fünf andern seien, wie er am Schlusse des betreffenden Capitels auch nachweist, nur als Zuzätze zu derselben anzusehen. Auch hierin zeigt sich Petrus in der Auffassung der Operationen als nicht unbedeutend über den Standpunkt des Sacrobosco, den er commentiert, fortgeschritten. Die von ihm als den Angelpunkt der ganzen Lehre von der Multiplikation hingestellte erste Regel des Sacrobosco ist die bekannte in der Formel:

$$a \cdot b = 10a - a(10 - b), \quad a < b$$

ausgesprochene, welche man mit dem Namen der complementären Multiplikation bezeichnet hat. Sie ist, um praktisch zu sein, natürlich auf $b > 5$ beschränkt, weil, wie der Verfasser ausdrücklich hervorhebt, jeder *rudis* auch ohne Rechnung wisse,

was 3·4 oder 3·5 sei. Es war also, wie man daraus ersieht, auch noch am Ende des XIII. Jahrhunderts üblich, das Einmaleins nur bis 5·5 einzuüben, obwohl wir gerade von Petrus de Dacia eine Darstellung des grossen Einmaleins bis 49·49 besitzen.

Einen weiteren bedeutenden Schritt über Sacrobosco hinaus hat Petrus auch in Bezug auf die *Progressio* gethan. Bei Sacrobosco werden nur diejenigen Fälle der arithmetischen Reihe behandelt, welche von 1 oder 2 ausgehend im ersten Falle 1 oder 2 als Differenz besitzen, in zweiten Falle dagegen nur 2. Es wird dann noch unterschieden, ob die Gliederzahl gerade oder ungerade ist, und auf diese Weise vier ganz verschiedene Regeln für die Reihensumme gegeben [1]). Petrus jedoch verwirft den ganzen Abschnitt über *Progressio*, ersetzt ihn durch einen nur sechs Zeilen füllenden neuen Text, und legt diesen seinem Commentare zu Grunde. Er hat den Begriff der arithmetischen Reihe völlig klar erfasst. Nach ihm kann die Differenz jede beliebige Zahl sein, man kann sie mit einer beliebigen Zahl beginnen lassen und mit einer willkührlichen Zahl von Gliedern beschliessen. Für sie gelten nur die beiden Regeln: „*Ist die Summe des ersten und letzten Gliedes gerade,* „*so multipliciert man ihre Hälfte mit der Gliederzahl; ist sie* „*ungerade, die ganze Summe mit der halben Gliederzahl, das Resultat ist die Summe der Reihe*“. Es sei sicher, sagt unser Verfasser, dass entweder die Summe des ersten und letzten Gliedes, oder die Gliederzahl, beziehungsweise auch *beide* gerade Zahlen würden. Letztere Bemerkung ist um so werthvoller, als dieselbe noch Prosdocimo de' Beldomandi (Anfang des XV. Jahrh.) unbekannt war [2]), der sich deshalb bei ungerader Anzahl der

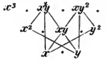
---

[1]) Die *progressio*, deren Anfangsglied 1, und deren Differenz 1 ist, heisst *naturalis*; diejenige mit der Differenz 2 *intercisa*. Den letztern Ausdruck erweitert Petrus auf jede Progression mit anderer Differenz als 1.

[2]) Die Formel des Beldomandi ist nach Favaro (*Bullettino Boncompagni XII*, S. 135): $S = (a+z)n + \frac{a+z}{2}$, wo a das Anfangs-, z das Endglied bedeutet, die Anzahl der Glieder aber $2n+1$ ist.

Glieder zu einer complicierten Form der Summe gezwungen sieht.

Sehr eingehend ist die Erläuterung, die Petrus dem einleitenden Capitel über das Wurzelausziehen im Algorismus des Sacrobosco widmet. Die Darlegung der Ursache für die Namen Linear-, Oberflächen- und Körperzahl ist klar und praecis, ebenso der Nachweis, dass wohl jede Quadratzahl Oberflächenzahl und jede Cubikzahl Körperzahl sei, aber nicht umgekehrt. Von geschichtlichem Werte ist jedenfalls der Ausdruck, die dreipunktige Linie, welche er als Beispiel wählt, *fliesse* nach der Breite, um so die Flächenzahl, hier speciell die Quadratzahl, zu erzeugen, und das so entstandene Quadrat *fliesse* nach der Tiefe, um so die Cubikzahl zu bilden. Es dürfte wohl hier eine der ersten, wenn nicht die erste Anwendung des Wortes *fluere* sein, um in der Mathematik einen solchen continuierlichen Bewegungszustand zu bezeichnen. Während Petrus mit Sacrobosco zwischen zwei aufeinandern Quadratzahlen nur ein geometrisches Mittel, das Produkt der Wurzeln, zulässt, will er solches zwischen zwei nicht unmittelbar folgenden Quadratzahlen nicht gelten lassen. So lägen zwischen 49 und 4 die Mittel 42, 36, 30, 25, 20, 16, 12, 9 und 6; denn es verhielte sich $49:42 = 42:36$; $36:30 = 30:25$; $25:20 = 20:16$; $16:12 = 12:9$; $9:6 = 6:4$. Es ist also gerade das wirkliche geometrische Mittel zwischen 49 und 4, 14, nicht berücksichtigt. Auch die Erweiterung der Bemerkung Sacroboscos von den beiden mittleren Proportionalen zwischen zwei auf einander folgenden Cubikzahlen dadurch, dass er diese Mittel auch mit dem quadratischen Mittel, den Quadratzahlen und den Wurzeln in Beziehung setzt, dürfte nicht ohne Interesse sein. Schreibt man seine diesbezügliche Figur mit allgemeinen Zahlzeichen so:



so übersieht man mit einem Blicke den Grund für die Richtigkeit seiner Bemerkungen. Die von Sacrobosco etwas sehr dunkel gefasste Erklärung der *novem limites*, das ist der Einer, Zehner Hunderter u. s. w. bis 1000000000, werden von unserem Petrus in klarer und deutlicher Weise auseinander gesetzt, und jedesmal eingehend durch Beispiele erläutert. Auch der Grund wird angegeben, weshalb die Rechnung hier Halt macht, obwohl man ja so weit gehen kann, als man will. Den Grund findet er mit Sacrobosco darin, dass man über Körperzahlen nicht hinausgehen könne, und die Zahl Tausendmillionen schon eine so grosse sei, dass niemand im Stande sei, sich eine klare Vorstellung davon zu machen. Im *Clm 14684* findet sich aus dem Anfange des XIV. Jahrhunderts ein Stück: *„Notabile de „novem limitibus“*, das dem Wesen nach mit dem Auseinandersetzungen unseres Verfassers übereinstimmt.

Bei der Ausziehung der Quadratwurzel aus 9548198, welche er zu 3090 mit dem Reste 98 bestimmt, macht Petrus darauf aufmerksam, dass Sacrobosco den hier vorliegenden Fall einer Null als Einerziffer der Wurzel in seiner Darstellung nicht vorgesehen habe. Für die Cubikwurzel giebt er zwei Beispiele. Das eine behandelt er nach der von Sacrobosco gelehrten Art, das zweite nach seiner eigenen Methode, von der er sagt, dass er sie nach langem Bemühen, die beschwerliche Rechnung kürzer und sicherer zu machen, selbständig erfunden habe. Sie lehrt methodisch und sicher diejenigen Ziffern finden, welche an zweiter, dritter etc. Stelle gefunden werden müssen, und stellt in dieser Hinsicht ebenfalls einen methodischen Fortschritt gegen Sacroboscos Darstellung vor. Besonders beachtenswerth erscheint dabei die genaue Definition derjenigen Kunstausdrücke, welcher er sich nachher bedienen will; Aehnliches ist bei Sacrobosco nicht gegeben. Die von Petrus zuerst behandelte Zahl 751089429 hat die genaue Wurzel 909. Wie man dieselbe praktisch auf die dritte Potenz erhob, wird ebenfalls gezeigt, und dürfte sich ebenfalls anderweit nicht dargelegt finden.

Seine eigene Methode setzt er an der Zahl 1234567890 auseinander, deren Cubikwurzel 1072 mit dem Reste 2642642 gefunden wird. Dass der Cubus von 1072, das ist 1231925248, die grösste Cubikzahl ist, welche in der gegebenen Zahl enthalten war, zeigt er dadurch, dass er die auf 1072 nächstfolgende ganze Zahl 1073 auf die dritte Potenz erhebt. Die sich dann ergebende Zahl 1245376017 ist um 808127 grösser als die ursprünglich vorgelegte Zahl, und damit ist der Beweis geliefert.

Wir hoffen, dass jeder, welcher den Commentar des Petrus de Dacia durchgearbeitet hat, denselben Nutzen aus ihm ziehen wird, welchen die Zuhörer der Vorlesung daraus sicherlich empfangen haben: ein volles Verständnis der für unsere Anschauung so höchst eigenartigen Rechnungsmethoden. Eine nothwendige Ergänzung des *Algorismus* des Sacrobosco sowohl, als speciell des Commentars unseres Petrus de Dacia ist der *Algorismus de minutiis* seines Zeit- und Universitätsgenossen Iohannes de Lineriis. Im Gegenzatz zu dem Algorismus des Sacrobosco werden in ihm nicht nur Regeln gegeben, sondern dieselben auch an concreten Beispielen ausführlich erläutert. Es wäre wohl zu wünschen, dass auch dieser Tractat, von dem es überhaupt nur zwei Druckausgaben aus dem Anfange des XVI. Jahrhunderts giebt[1]), wogegen er in Handschriften sich eben so häufig findet als der des Sacrobosco, neu abgedruckt würde, um ein volles Bild der Rechenkunst in dem ersten Viertel des XIV. Jahrhundert sich bilden zu können. Auch zu diesem *Algorismus de minutiis* habe ich auf meiner Reise einen ausführlichen Commentar aufgefunden. Anwendungen der Rechenmechanismen, wie sie durch Petrus de Dacia und Iohannes

[1]) Die erste ist enthalten in den Blättern 19 bis 28 des Druckes *Algorismi tractatus. Paduae 1485*, das zweite in der Neuausgabe derselben Buches durch Federico Delfino, *Venetiis 1540*. Genauere Beschreibungen sehe man bei Riccardi, *Biblioteca matematica Italiana, T. I*, Sp. 101—102 und bei Favaro, *a. a. O.*, S. 41—62.

de Lineriis auseinandergesetzt waren, auf die kaufmännischen Rechnungsarten sind uns, von Italien abgesehen, vor dem Anfange des XV. Jahrhunderts in wirklichen Abhandlungen nicht aufgestossen. Von da an findet man sie häufig. Ein vortreffliches Beispiel dazu ist das ausführliche Rechenbuch, das um die Mitte des XV. Jahrhunderts in Regensburg entstanden ist, und von welchem unter dem Titel: „*Algorismus Ratisponensis*“ fünf Exemplare, die jedoch in ihrem Umfange erheblich von einander abweichen, in der Münchner Hof- und Staatsbibliothek und der Stiftsbibliothek zu St. Florian in Oberoestereich sich erhalten haben[1]. Sie alle aber zeigen, dass sie von Italien aus beeinflusst sind, wie denn mehrfach der Ausdruck „*modo ytalico*“ sich findet. Jedenfalls stammen aber diese Rechenbücher nicht mehr aus Universitätskreisen, wie die des Petrus de Dacia und des Iohannes de Lineriis.

Dass obige Zeilen und die beiden mittelalterlichen Anleitungen zum Zahlenrechnen in neuem und, hoffe ich, leicht lesbarem Gewande haben erscheinen können, verdanken wir der grossen Liberalität der Königl. Dänischen Akademie der Wissenschaften zu Kopenhagen, auf deren Kosten diese Ausgabe gedruckt ist. Ihr für die bereitwillige Erfüllung eines von mir dahin ausgesprochenen Wunsches meinen aufrichtigsten Dank abzustatten treibt mich mein innerstes Gefühl; ich glaube aber, dass auch jeder, der an der Geschichte seiner Wissenschaft Interesse hat, in denselben mit einstimmen wird. Ist es doch jetzt jedem möglich, mit Leichtigkeit den so eigenartigen Gang des mittelalterlichen Rechnens zu verfolgen, was bisher nur an der Hand oft schwer zugänglicher Handschriften thunlich war, die zu lesen überdies nicht jedermanns Sache sein dürfte.

[1] *Clm 14504*, Blatt 394—402; *Clm 14544*, Blatt 146—151; *Clm 14783*, Blatt 411—441; *Clm 14908*, Blatt 11—23, 60—124 (Letztere enthält nur Theil 2 u. 3, diese aber in sehr erweiterter Gestalt). *Codex St. Florian XI, 619*, Blatt 207—226.

Thorn, 5. Juli 1896.

M. Curtze.

I. IOHANNIS DE SACROBOSCO ALGORISMUS VULGARIS.

Omnia, quae a primaeva rerum origine processerunt, ratione numerorum formata sunt, et quemadmodum sunt, sic cognosci habent: unde in universa rerum cognitione est ars numerandi cooperativa. Hanc igitur scientiam numerandi compendiosam quidam philosophus edidit nomine Algus, unde et *Algorismus* nuncupatur, (quae) vel ars numerandi, vel ars introductoria in numerum interpretatur. Numerus quidem dupliciter notificatur, materialiter et formaliter. Materialiter enim numerus est unitates collectae, formaliter est multitudo ex unitatibus profusa. Unitas vero est, qua unaquaeque res dicitur una. Numerorum autem alius digitus, alius articulus, alius numerus compositus. Digitus quidem est omnis numerus minor denario; articulus vero est omnis numerus divisibilis in decem partes aequales, ita quod nichil sit residuum; compositus vero sive mixtus est, qui constat ex digito et articulo. Et sciendum est, quod omnis numerus inter duos articulos proximos est compositus. Huius autem artis novem sunt species, scilicet Numeratio, Additio, Subtractio, Mediatio, Duplatio, Multiplicatio, Divisio, Progressio et Radicum extractio, et haec dupliciter, quoniam in numeris quadratis et cubicis. Inter quas primo de numeratione et postea de aliis per ordinem exequitur.

DE NUMERATIONE.

Est autem numeratio cuiuslibet numeri per figuras competentes artificialis repraesentatio. Figura vero, differentia, locus

et limes idem supponunt, sed a diversis rationibus imponuntur. Figura enim dicitur, quantum ad lineae protractionem; differentia vero, quantum per illam ostenditur, qualiter figura sequens differat a praecedente; locus dicitur ratione spatii, in quo scribitur; limes vero, quia est via ordinata ad cuiuslibet numeri repraesentationem. Sciendum igitur, quod iuxta novem limites inveniuntur novem figurae significativae novem digitos repraesentantes, quae tales sunt:

9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1.

Decima vero 0 dicitur teca, circulus, vel cyfra, vel figura nichili, quoniam nichil significat; ipsa tamen locum tenens dat aliis significare, nam sine cyfra vel cyfris purus articulus non potest scribi. Cum igitur per has novem figuras significativas adiunctis quandoque cyfra, quandoque cyfris contingit, quemlibet numerum repraesentare, ideo non fuit necesse plures figuras significativas invenire. Notandum igitur, quod quilibet digitus una sola figura sibi appropriata habet scribi, omnis vero articulus per cyfram ⟨primo loco positam⟩ et digitum, a quo denominatur ille articulus, habet repraesentari, quoniam quilibet articulus ab aliquo digito denominatur, ut denarius ab unitate, vigenarius a binario, et ita de aliis. Omnis quidem numerus in eo, quod est digitus, habet poni in prima differentia, omnis articulus in secunda. Omnis vero numerus a decem usque ad centum, ut centenarius excludatur, duabus figuris habet scribi, et ita, si sit articulus, per cyfram primo loco positam et figuram scriptam versus sinistram, quae significat digitum, a quo denominatur ille articulus; si sit numerus compositus, praescribatur digitus, qui est pars illius compositi, et sinistretur articulus ut prius. Item omnis numerus, qui est a centum usque ad mille, ut millenarius excludatur, per tres cyfras vel figuras habet scribi; item omnis numerus a mille usque ad decem milia per quatuor, et ita deinceps. Notandum etiam, quod quaelibet figura primo loco posita significat suum digitum, secundo decies suum digitum, tertio centies, quarto millesies, quinto decies millesies, sexto

centies millesies, septimo millesies millesies, et sic in infinitum multiplicando per haec tria: decem, centum et mille. Quae tamen omnia in hac comprehenduntur maxima: Quaelibet figura in sequenti loco posita decies tantum significat, quantum in praecedenti. Et sciendum, quod supra quamlibet figuram loco millenarii positam competenter potest poni quidam punctus ad denotandum, quod tot millenarios debet ultima figura repraesentare, quot sunt puncta pertransita. Sinistrorsum autem scribimus in hac arte more arabico sive iudaico, huius scientiae inventorum, vel hac ratione, et meliori, ut in legendo consuetum ordinem servantes maiorem numerum minori praeponamus.

DE ADDITIONE.

Additio est numeri vel numerorum ad numerum aggregatio, ut videatur summa excedens. In additione duo ordines figurarum, id est duo numeri ad minus sunt necessarii, scilicet numerus, cui debet fieri additio, et numerus addendus. Numerus, cui debet fieri additio, est numerus, qui recipit additionem, et debet superscribi; numerus vero addendus est, qui debet addi ad alium, et debet subscribi. Competentius est, ut minor numerus subscribatur et maiori addatur, quam e contrario; sed sive sic fit, sive sic, semper idem proveniet. Si igitur velis numerum numero addere, scribe numerum, cui debet fieri additio, in superiori ordine per suas differentias, numerum vero addendum in inferiori ordine per suas differentias, ita quod prima inferioris ordinis sit sub prima superioris, secunda sub secunda, et ita de aliis. Hoc autem facto addatur prima figura inferioris ordinis primae figurae superioris. Ex hac igitur additione aut excedet digitus, aut articulus, aut numerus compositus. Si digitus, loco superioris figurae deletae scribatur digitus excedens; si articulus, loco superioris deletae scribatur cyfra, et transferatur articulus versus sinistram, et addatur proximae figurae sequenti, si sit figura sequens; si vero non sit figura sequens, tunc ponatur in loco vacuo. Si vero contingit, quod figura sequens, cui debet

fieri additio articuli, sit cyfra, ea deleta loco eius scribatur digitus articuli; sed si sit figura novenarii, et ei debet addi unitas, loco illius novenarii scribatur cyfra, et sinistretur articulus ut prius. Si excrescat numerus compositus, loco superioris deletae scribatur digitus, qui est pars illius compositi, et sinistretur articulus ut prius. Quo facto addatur secunda secundae sibi suprapositae, et negotiandum est ut prius. Notandum etiam, quod in additione et in omnibus sequentibus speciebus, quando una figura alii directe supraponatur, utendum est qualibet figura, ac si per se poneretur.

DE SUBTRACTIONE.

Subtractio est propositis duobus numeris maioris ad minorem excessus inventio, vel subtractio est numeri a numero ablatio, ut videatur summa derelicta. Minor autem de maiori, vel par de pari subtrahi potest, maior vero de minori nequaquam. Ille quidem numerus maior dicitur, qui plures habet figuras, dummodo ultima sit significativa. Si autem tot sunt in numero uno, quot in reliquo, iudicandum est per ultimas vel per penultimas, vel deinceps. In subtractione vero duo numeri significativi necessarii sunt, scilicet numerus, a quo debet fieri subtractio, et numerus subtrahendus. Numerus, a quo debet fieri subtractio, scribendus est in superiori ordine per suas differentias; numerus autem subtrahendus in inferiori per suas differentias, ita quod prima sub prima, secunda sub secunda, et sic de aliis. Subtrahe igitur primam figuram inferioris ordinis a figura sibi suprapposita, scilicet superioris ordinis; et illa aut erit par figurae sibi suprapositae, aut maior, aut minor. Si par, ea deleta loco eius ponatur cyfra propter figuras sequentes, ne minus significent; si maior, demantur ab ea tot unitates, quot continet inferior figura, et residuum loco eius ponatur; si minor, quia maior numerus de minori subtrahi non potest, mutuetur unitas a proxima figura sequente, quae valet decem respectu proximae figurae praecedentis. Ab isto ergo denario et a figura,

a qua debuit fieri subtractio, simul iunctis subtrahatur figura inferior, et residuum loco figurae deletae ponatur. Si vero figura, a qua mutuanda est unitas, sit unitas, ea deleta scribatur loco eius cyfra, ne figurae sequentes minus significent, et deinde operare ut prius. Si autem figura, a qua mutuanda est unitas, sit cyfra, relinquatur intacta, transeatur ulterius ad figuram significativam, et ibi mutuetur unitas, et in redeundo loco cuiuslibet cyfrae pertransitae ponatur figura novenarii. Cum vero perventum fuerit ad istam figuram, de qua intenditur, remanebit tantum denarius. Ab illo igitur denario et figura, a qua debuit fieri subtractio, simul iunctis subtrahatur digitus, et residuum loco figurae deletae scribatur. Ratio autem, quare loco cuiuslibet cyfrae pertransitae relinquitur figura novenarii, haec est, quia, si tertio loco mutuetur unitas, illa respectu figurae, a qua debuit fieri subtractio, valuit centum, sed loco cuiuslibet figurae seu cyfrae pertransitae relinquitur novenarius, qui valet nonaginta, unde remanet tantum denarius; et eadem erit ratio, si a quarto loco vel a quinto loco et deinceps mutuetur unitas. Hoc autem facto subtrahe secundam inferioris a secunda superioris, et negotiandum est ut prius. Sciendum tamen, quod tam in additione quam in subtractione possumus bene a sinistra incipere redeundo versus dextram; sed tamen, ut prius dicebatur, est commodosius, ut praedictum est. Si autem probare volueris, utrum bene feceris an non, figuras, quas subtraxisti, adde superioribus, et sic occurrent tibi eaedem figurae, quas prius habuisti, si recte feceris. Similiter in additione, quando omnes figuras addideris, subtrahe, quas prius addidisti, et redibunt eaedem figurae, quas prius habuisti, si recte feceris: est enim subtractio additionis probatio et e converso.

DE MEDIATIONE.

Mediatio est alicuius numeri propositi medietatis inventio, ut videatur, quae et quanta sit ista medietas. In mediatione autem tantum unus ordo figurarum et unicus numerus est

necessarius, scilicet numerus mediandus. Si velis igitur aliquem numerum mediare, scribatur ille numerus per suas differentias, et incipe a dextris, scilicet a prima figura versus dextram, tenendo ad sinistram partem. Illa ⟨igitur⟩ figura aut erit significativa aut non. Si prima figura sit cyfra, relinquatur intacta; si vero significativa, aut significat unitatem aut alium digitum. Si unitatem, loco eius deletae scribatur cyfra propter figuras sequentes, ne minus significent, et scribatur illa unitas exterius in tabula, vel resolvatur in sexaginta minuta, et medietas illorum sexaginta abiciatur, reliqua reservetur exterius in tabula, scilicet triginta, vel scribatur figura dimidii, sic scilicet ϑ, quae nullum locum ordinis obtinet sibi, aliquid tamen significat, ⟨scilicet⟩ quod medietas duplata in suum locum recipiatur in duplatione. Si autem prima figura significet alium digitum ab unitate, aut ille erit par aut impar. Si par, eo deleto loco eius scribatur medietas illius numeri paris; si impar, sume proximum numerum parem sub illo contentum, et pone medietatem eius loco illius imparis deleti; de unitate autem, quae remanet medianda, fac ut prius. Hoc autem facto medianda est secunda. Si sit cyfra, praetermittatur intacta; si fuerit significativa, aut erit par aut impar. Si par, loco eius deletae scribatur medietas illius paris; si impar, aut erit unitas aut alius digitus numerum imparem repraesentans. Si unitas, loco eius deletae scribatur cyfra; illa autem unitas cum valet decem respectu prioris figurae, de illis decem sumatur medietas, scilicet quinarius, et addatur figurae praecedenti; si vero fuerit alius digitus numerum imparem repraesentans, sume proximum parem sub illo contentum, et loco eiusdem imparis deleti scribatur eius medietas; unitas autem, quae remanet medianda, respectu ⟨figurae⟩ praecedentis valet decem: dividatur ergo ille denarius in duos quinarios, et unus illorum abiciatur, reliquus vero addatur figurae praecedenti ut prius. Si autem figura fuerit cyfra, cui debet fieri additio, deleatur, et loco eius scribatur ille quinarius. Et sic operandum est, donec totalis numerus medietur.

DE DUPLATIONE.

Duplatio est numeri propositi ad se ipsum aggregatio, ut videatur summa excrescens. In duplatione autem tantum unus ordo figurarum est necessarius; et est inchoandum a sinistra parte, scilicet a figura maiori, hoc est a figura maiorem numerum repraesentante. In tribus vero praecedentibus speciebus inchoamus a dextra, scilicet a figura minori, hoc est minorem numerum repraesentante; in hac autem specie et in omnibus sequentibus inchoandum est a sinistra parte et a figura maiori. Unde versus:

Subtrahis aut addis a dextris aut mediabis,
A laeva dupla, divide multiplicaque,
Extrahe radicem duplam sub parte sinistra.

Et ratio hujus est, quoniam, si a prima figura incipias duplare, contingit quandoque eundem numerum bis duplare; et licet aliquo modo possemus incipere a dextris, tamen difficilior erit doctrina et operatio. Si velis ergo aliquem numerum duplare, scribatur primo numerus ille per suas differentias, et dupletur ultima figura. Ex illa igitur duplatione aut excrescit digitus, aut articulus, aut numerus compositus. Si digitus, loco prioris deletae scribatur digitus excrescens; si articulus, loco prioris deletae scribatur cyfra et transferatur articulus versus sinistram; si numerus compositus, loco superioris sive prioris deletae scribatur digitus, qui est pars illius numeris compositi, et sinistretur articulus. Hoc facto duplanda est penultima, et quidquid excreverit, negotiandum est ut prius. Si vero occurrat cyfra, relinquenda est intacta; sed si aliquis numerus debeat addi cyfrae, loco illius deletae scribatur numerus addendus. Eodem modo etiam operandum est de omnibus aliis, donec totalis numerus dupletur. Probatio autem huius est talis: si recte duplaveris, media, et si recte mediaveris, dupla, et semper occurrent tibi eaedem figurae, quas prius habuisti. Est enim mediatio duplationis probatio et e converso.

DE MULTIPLICATIONE.

Multiplicatio est numeri propositis duobus numeris tertii inventio, qui totiens continet alterum illorum, quot unitates sunt in reliquo. In multiplicatione duo numeri principaliter sunt necessarii, scilicet numerus multiplicans et numerus multiplicandus. Numerus multiplicans adverbialiter designatur, numerus vero multiplicandus nominalem recipit appellationem. Potest etiam tertius numerus assignari, qui productus dicitur, proveniens ex ductione unius in alterum. Notandum etiam, quod de numero multiplicante potest fieri numerus multiplicandus et e converso, manente semper eadem summa. Et hoc est, quod communiter dicitur seu allegatur secundum arismetricos, scilicet quod omnis numerus convertitur in se multiplicando. Sunt autem sex regulae multiplicationis. Prima est:

Quando digitus multiplicat digitum, subtrahendus est minor digitus ab articulo suae denominationis per differentiam maioris digiti ad denarium, denario simul computato. Verbi gratia, si velis scire, quot sunt quater octo, vide, quot sunt unitates inter octo et decem, denario simul computato; et patet, quod sunt duae. Subtrahatur igitur quaternarius bis a quadraginta, et relinquentur triginta duo, et patebit summa totius multiplicationis. Secunda regula est ista:

Quando digitus multiplicat articulum, ducendus est digitus in digitum, a quo denominatur ille articulus, per primam regulam, et quaelibet unitas valebit decem, quilibet denarius centum. Et hoc est verum, sive excrescit articulus vel numerus compositus. Tertia regula est ista:

Quando digitus multiplicat numerum compositum, ducendus est digitus, scilicet multiplicans, in utramque partem compositi, ita quod digitus in digitum per primam regulam, in articulum per secundam, et postea producta coniungantur, et patebit summa totius multiplicationis. Quarta regula est:

Quando articulus multiplicat articulum, ducendus est digitus,

a qno denominatur unus illorum, in digitum, a quo denominatur reliquus; et quilibet unitas valet centum, quilibet denarius mille. Quinta regula est:

Quando articulus multiplicat numerum compositum, ducendus est digitus articuli in utramque partem numeri compositi, et coniungantur producta, et patebit summa. Sexta regula est:

Quando numerus compositus multiplicat numerum compositum, ducenda est utraque pars ⟨numeri⟩ multiplicantis in utramque partem numeri multiplicandi, et producta coniungantur, et patebit summa totius. Et sic ducetur digitus bis, quia semel in digitum et semel in articulum; articulus similiter bis, semel enim in digitum et semel in articulum. Hic tamen articulus non nisi ad principales extenditur articulos.

Si igitur velis aliquem numerum per se vel per alium multiplicare, scribe numerum multiplicandum per suas differentias in superiori ordine, numerum vero multiplicantem in inferiori ordine per suas differentias, ita tamen, quod prima figura inferioris ordinis sit sub ultima superioris. Quo facto ducenda est ultima multiplicantis in ultimam multiplicaudi. Ex tali igitur ductu aut excrescit digitus, aut articulus, aut numerus compositus. Si digitus, ex directo super positionem figurae multiplicantis scribatur digitus excrescens; si articulus, ex directo figurae multiplicantis scribatur cyfra et transferatur articulus versus sinistram; si numerus compositus, ex directo figurae multiplicantis scribatur digitus, qui est pars illius numeri compositi, et sinistretur articulus ut prius. Hoc facto ducenda est penultima numeri multiplicantis in ultimam multiplicandi, et quidquid inde excreverit, negotiandum est ut prius; et sic fiat de omnibus figuris numeri multiplicantis, donec veniatur ad primam figuram multiplicantis, quae ducenda est in ultimam multiplicandi. Et ex isto ductu aut excrescit digitus, aut articulus, aut numerus compositus. Si digitus, loco superioris deletae scribatur digitus excrescens; si articulus, loco superioris deletae scribatur cyfra, et sinistretur articulus; si numerus compositus, loco superioris deletae scri-

batur digitus, qui est pars illius numeri compositi, et sinistretur articulus ut prius. Hoc ⟨autem⟩ facto anteriorandae sunt figurae numeri multiplicantis per unicam differentiam, ita scilicet, quod prima multiplicantis sit sub penultima multiplicandi, reliquis similiter per unum locum anterioratis. Quo facto ducenda est ultima multiplicantis in penultimam multiplicandi, sub qua est prima figura multiplicantis, et ex illo ductu aut excrescit digitus aut articulus, aut numerus compositus. Si digitus, ex directo figurae sibi suprapositae addatur digitus; si articulus, transferatur versus sinistram, et figura sibi directe suprapposita relinquatur intacta, sive sit significativa, sive non; si numerus compositus, addatur figurae sibi suprapositae digitus, et sinistretur articulus. Similiter quaelibet figura numeri multiplicantis ducenda est in penultimam multiplicandi, donec perveniatur ad primam multiplicantis, ubi operandum est, quemadmodum prius dicebatur de prima. Deinde ut prius anteriorandae sunt figurae multiplicantis per unicam differentiam. Nec cessandum est a tali anterioratione, nec a tali ductu numeri multiplicantis in numerum multiplicandum, quousque quaelibet figura numeri multiplicantis ducatur in quamlibet figuram seu quemlibet numerum multiplicandi. Si autem contingat, quod prima figura numeri multiplicantis sit cyfra, et ei iam supraponatur figura significativa, loco illius superioris deletae scribenda est cyfra. Si autem occurrat cyfra in inferiori ordine inter primam et ultimam figuram, et ei directe supraponatur figura significativa, relinquenda est intacta, sed si sit spatium vacuum suprapositum, in eodem spatio sive loco scribenda est cyfra. Si autem cyfra occurrat inter primam et ultimam figuram numeri multiplicandi, anteriorandus est ordo figurarum numeri multiplicantis per duas differentias; si duae sunt cyfrae, per tres differentias, et sic deinceps, quoniam ex ductione figurae in cyfram nichil resultat. Ex praedictis iam patet, quod, si prima figura numeri multiplicandi sit cyfra, sub eam non debet fieri anterioratio. Sciendum etiam, quod in multiplicatione et divisione et radicum

extractione competenter potest relinqui spatium vacuum inter duos ordines figurarum, ut ibi ponatur, quod provenit addendum vel subtrahendum, ne aliquid memoriae intercidat.

DE DIVISIONE.

Divisio est numeri per numerum duobus numeris propositis maioris per minorem in tot partes distributio, quot sunt unitates in minori. Notandum igitur, quod in divisione tres numeri sunt necessarii, scilicet numerus dividendus, et numerus dividens sive divisor, et numerus denotans quotiens sive numerus exiens. Numerus autem dividendus semper debet esse maior vel saltem par numero divisori, si debeat divisio fieri per integra. Si velis igitur aliquem numerum per se vel per alium dividere, scribe numerum dividendum in superiori ordine per suas differentias, divisorem vero in inferiori ordine per suas differentias, ita quod ultima divisoris sit sub ultima dividendi, penultima sub penultima, et ita de aliis, si competenter fieri possit. Sunt enim duae causae, quare ultima sub ultima collocari non poterit: aut quia ultima inferioris ordinis non potest subtrahi ab ultima superioris ordinis, eo quod ⟨ista⟩ est minor inferiori, aut quia, licet ultima inferioris ordinis aliquotiens possit subtrahi a sua superiori, reliquae tamen non possunt totiens a sibi suprapositis; ut si ultima sit par figurae sibi suprapositae, penultima vero sive antepenultima sit maior. In tali casu locanda est ultima divisoris sub penultima dividendi. His itaque ordinatis incipiendum est operari ab ultima figura numeri divisoris; et videndum est, quotiens illa possit subtrahi a figura sibi supraposita, ita quod totiens possint subtrahi reliquae a sibi suprapositis et a suo residuo, si aliquid fuerit residuum. Et notandum, quod non contingit pluries subtrahere quam novies, nec minus quam semel. Viso igitur, quotiens figurae inferioris ordinis subtrahi possint a suis superioribus, scribendus est numerus denotans quotiens super positionem ex directo illius figurae, sub qua est prima figura numeri divisoris,

et per illam figuram subtrahendae sunt omnes inferiores figurae a suis superioribus. Hoc autem facto anteriorandae sunt figurae numeri divisoris per unicam differentiam versus dextram, et negotiandum est ut prius. Si autem contingat, quod post anteriorationem ultima figura divisoris non aliquotiens possit subtrahi a figura sibi supraposita, tunc supra figuram, sub qua est prima divisoris, directe scribenda est cyfra in ordine numeri denotantis quotiens, et anteriorandae sunt figurae ut prius. Similiter faciendum est, ubicumque contingit in numero dividendo, quod divisor non possit subtrahi a numero dividendo: ponenda est cyfra in ordine numeri denotantis quotiens, et anteriorandae sunt figurae ut prius. Nec cessandum est a tali auterioratione, nec a tali numeri denotantis quotiens positione, nec a ductu numeri denotantis quotiens in divisorem, nec a producti subtractione, donec prima divisoris sit subtracta a prima dividendi. Quo facto aut aliquid erit residuum aut nichil. Si aliquid residuum fuerit, reservetur exterius in tabula, et erit semper minus divisore. Si autem velis scire, quot unitates de numero dividendo conveniant cuilibet unitati numeri divisoris, numerus denotans quotiens hoc ostendit. Cum itaque facta fuerit talis divisio, et probare volueris, utrum bene feceris an non, multiplica numerum denotantem quotiens per divisorem, et redibunt eaedem figurae, quas prius habuisti, si nichil fuerit residuum; sed si aliquid fuerit residuum, tunc cum additione illius residui redibunt eaedem figurae; et ita multiplicatio probat divisionem et e contrario, ut, si facta multiplicatione dividatur productum per multiplicantem, tunc in numero denotante quotiens exibunt eaedem figurae numeri multiplicandi.

DE PROGRESSIONE.

Progressio est numerorum secundum aequales excessus ab unitate vel a binario sumptorum aggregatio, ut universorum seu diversorum numerorum summa compendiose habeatur. Progressionum autem alia est naturalis sive continua, alia intercisa

sive discontinua. Naturalis sive continua est, quando incipitur ab unitate, et non obmittitur in ascensu aliquis numerus, ut 1. 2. 3. 4. 5. 6., et sic de aliis; et sic semper numerus sequens superat praecedentem in unitate tantum. Intercisa est, quando uniformiter obmittitur aliquis numerus, ut 1. 3. 5. 7. 9. et caetera. Similiter a binario possunt incipere, ut 2. 4. 6. 8.; et sic semper numerus sequens superat praecedentem in duabus unitatibus. Notandum autem, quod de progressione naturali duae dantur regulae. Prima est:

Quando progressio uaturalis terminatur in numerum parem, per medietatem ipsius multiplica numerum proximum totali superiorem. Verbi gratia: 1. 2. 3. 4. Multiplica quinarium per binarium, sic bis quinque, et exibunt decem, summa totius progressionis. Unde versus:

Par, paris media maiorem multiplicabis.

Secunda regula est: Quando progressio naturalis terminatur in numerum imparem, per maiorem portionem ipsius multiplica totalem numerum. Verbi gratia: 1. 2. 3. 4. 5. Multiplicetur quinarius per ternarium, sic ter quinque, et resultabit quindenarius, summa totius progressionis. Unde versus:

Impar parte sui maiori multiplicetur.

De progressione intercisa similiter dantur duae regulae. Prima est:

Quando progressio intercisa terminatur in numerum parem, per medietatem illius multiplica numerum proximum medietati superiorem. Ut 2. 4. 6. Multiplicetur quaternarius per ternarium, sic ter quatuor, et resultabit duodenarius, summa totius progressionis. Unde versus

Si par, per medium se multiplicato sequentem.

Secunda regula talis est: Quando progressio intercisa terminatur in numerum imparem, multiplica maiorem portionem per se ipsam. Verbi gratia: 1. 3. 5. Multiplicetur ternarius per se ipsum, sic ter tria, et sunt novem, summa totius progressionis. Unde versus:

Imparibus media pars maior multiplicat se.

DE RADICUM EXTRACTIONE, ET PRIMO IN NUMERIS QUADRATIS.

Sequitur de radicnm extractione, et prımo in numeris quadratis; unde videndum est, quid sit numerus quadratus, et quid sit radix numeri quadrati, et quid sit radicem extrahere. Praenotanda tamen est haec divisio: Numerorum alius est linearis, alius superficialis, alius solidus. Numerus linearis est, qui consideratur tantum penes processum, non habito respectu ad ductionem numeri in numerum; et dicitur linearis, quia unicum tantum habet numerum, sicut linea tantum unicam habet dimensionem, scilicet longitudinem. Numerus superficialis est, qui provenit ex ductu numeri in numerum; et dicitur superficialis, quoniam duos habet numeros dimetientes sive mensurantes ipsum, sicut superficies duas habet dimensiones, scilicet longitudinem et latitudinem. Sed sciendum, quod dupliciter potest numerus duci in numerum; aut enim semel aut bis. Si igitur numerus semel ducatur in numerum, hoc est aut in se ipsum aut in alium. Si in se ipsum, fit numerus quadratus; et dicitur quadratus, quia divisim scriptus per unitates habebit quatuor latera aequalia ad modum quadrati. Si ducatur in alium, fit numerus superficialis et non quadratus, ut binarius ductus in ternarium constituit senarium, numerum superficialem, sed non quadratum. Unde patet, quod omnis numerus quadratus est superficialis, et non convertitur. Radix autem numeri quadrati est ille numerus, qui ita ducitur in se, ⟨ut efficiatur ille numerus quadratus⟩, ut bis duo sunt quatuor. Quaternarius igitur est primus numerus quadratus, et eius radix est binarius. Si autem numerus bis ducatur in numerum, constituet numerum solidum; et dicitur solidus, quoniam, ⟨sicut⟩ solidum corpus tres habet dimensiones, scilicet longitudinem, latitudinem et spissitudinem, ita numerus iste habet tres numeros producentes in se. Sed numerus potest dupliciter bis duci in numerum, quia aut in se ipsum, aut in alium. Si igitur numerus ducatur bis in se ipsum

aut semel in suum quadratum, quod idem valet, fit numerus cubicus; et dicitur cnbicus ab hoc nomine cubus, quod est solidum. Est autem cubus quoddam corpus sex habens superficies, ut taxillus, octo angulos et duodecim latera. Si vero aliquis numerus bis ducatur in alium, fit numerus solidus et non cubicus, ut bis tria bis constituunt duodecim. Unde patet, quod omnis numerus cubicus est solidus, et non convertitur. Ex praedictis etiam patet, quod idem numerus est radix numeri quadrati et cubici, non tamen idem quadratus et cubicus. Patet etiam, quod omnis numerus potest esse radix quadrati et cubici, sed non omnis quadratus vel cubicus. Cum igitur ex ductu unitatis in se semel vel bis nichil proveniat nisi unitas, dicit Boetius in *arismetrica* sua, quod unitas potentialiter est omnis numerus, non tamen actu. Notandum etiam, quod inter quoslibet duos quadratos proximos est unicum medium proportionale, quod provenit ex ductione radicis unius quadrati in radicem alterius. Iuter duos cubicos quoslibet proximos est duplex medium proportionale, scilicet minus medium et maius. Minus medium provenit ex ductu radicis maioris cubici in quadratum minoris; maius medium est, si ducatur radix minoris cubici in quadratum maioris. Cum igitur ultra summam numerorum solidorum in arte praesenti non fiat processus, tantum novem limites numerorum distinguuntur. Est enim limes numerorum eiusdem naturae extremis contentorum terminis continua ordinatio, unde primus limes est novem digitorum continua progressio; secundus vero novem articulorum principalium; tertius centenariorum; quartus millenariorum. Tres (limites) etiam resultant in compositis per digitorum appositionem super quemcumque trium praedictorum, et si alter alteri praeponatur. Sed per finalis termini replicationem supra se semel per modum quadratorum aut bis per modum solidorum quocumque alio praecedente resultat penultimus limes et ultimus

RADICIS NUMERI QUADRATI EXTRACTIO.

Radicem numeri quadrati extrahere est proposito aliquo numero radicem eius quadratam invenire, si numerus quadratus fuerit propositus; si vero non sit quadratus, radicem maximi quadrati sub numero proposito contenti invenire. Si velis igitur radicem alicuius numeri quadrati extrahere, scribe numerum illum per suas differentias, et computa numerum figurarum, utrum sit par vel impar. Si par, incipiendum est operari sub penultima, si impar, ab ultima; et ut breviter dicatur, semper ab impari ultima incipiendum est. Sub ultima igitur figura in impari loco posita inveniendus est quidam digitus, qui ductus in se deleat totum sibi suprapositum respectu sui, vel in quantum vicinius potest. Tali autem digito invento, et ducto in se, et a superiori subtracto duplandus est ille digitus, et duplatum ponendum est sub proxima figura anteriori versus dextram et eius subduplum sub illo. Quo facto inveniendus est quidam digitus sub proxima figura ante duplatum, qui ductus in duplatum deleat totum suprapositum respectu duplati, deinde ductus in se deleat totum suprapositum respectu sui vel in quantum vicinius potest. Vel potest ita subtrahi digitus ultimo inventus, ut ducatur in duplatum vel duplata et postea in semet ipsum, deinde autem duo producta simul addantur, ita quod prima figura ultimi producti ponatur ante primam primi producti, et secunda addatur primae et ita deinceps, et ita simul subtrahatur a toto numero respectu digiti inventi, et idem est, ac si fiat divisio. Si autem contingat, quod non possit aliquis digitus inveniri post anteriorationem, tunc ponenda est cyfra sub tertia figura anteriori, ⟨et sub illa cyfra etiam cyfra⟩, et anteriorandum est primum duplatum cum suo subduplo. Nec cessandum est a tali digiti inventione, nec a digiti inventi duplatione, nec a duplatorum anterioratione, nec a subdupli sub duplo positione, donec sub prima figura inventus fuerit quidam digitus, qui ductus in omnia duplata deleat totum suprapositum respectu

duplatorum, deinde ductus in se deleat totum suprapositum respectu sui, vel in quantum vicinius potest. Quo facto aut aliquid erit residuum aut nichil. Si nichil, constat, quod numerus propositus fuerit quadratus, et eius radix est digitus ultimo inventus cum subduplo vel subduplis, ita quod praeponatur. Si vero fuerit aliquid residuum, constat, quod numerus propositus non fuerit quadratus, sed digitus ultimo inventus cum subduplo vel subduplis tunc est radix maximi quadrati sub numero proposito contenti. Si velis igitur probare, utrum bene feceris an non, multiplica digitum ultimo inventum cum subduplo vel subduplis per eundem digitum cum subduplo vel subduplis, et redibunt eaedem figurae, quas prius habuisti, si nichil fuerit residuum; sed si aliquid fuerit residuum, tunc cum additione illius residui redibunt eaedem figurae, quae prius fuerunt.

DE RADICUM EXTRACTIONE IN NUMERIS CUBICIS.

Sequitur de radicum extractione in numeris cubicis; unde videndum est, quid sit numerus cubicus, et quae sit eius radix, et quid sit radicem cubicam extrahere. Est igitur numerus cubicus, sicut patet ex praedictis, qui provenit ex ductu alicuius numeri in se bis vel semel in suum quadratum. Radix (autem) numeri cubici est ille numerus, qui ita bis ducitur in se vel semel in suum quadratum. Unde patet, quod numerus cubicus et quadratus eandem habent radicem, sicut dictum est superius. Radicem autem cubicam extrahere est numeri propositi radicem cubicam invenire, si numerus propositus sit cubicus; si vero non sit cubicus, tunc radicem cubicam extrahere est maximi cubici sub numero proposito contenti radicem cubicam invenire. Proposito igitur aliquo numero, cuius radicem velis extrahere cubicam, primo computandae sunt figurae per quartas, sive per locos millenariorum, et sub loco ultimi millenarii inveniendus est quidam digitus, qui ductus in se cubice deleat totum suprapositum respectu sui, vel quantum vicinius potest. Quo facto

triplandus est ille digitus, et triplatum ponendum est sub proxima figura tertia versus dextram et subtriplum sub triplo. Deinde inveniendus est quidam digitus sub proxima figura ante triplatum, qui cum subtriplo ductus in triplatum, postea sine subtriplo ductus in productum deleat totum suprapositum respectu triplati, deinde ductus in se cubice deleat totum suprapositum respectu sui, vel in quantum vicinius potest. Hoc autem facto triplandus est ille digitus iterum, et iterum triplatum ponendum est sub proxima figura tertia ut prius, et eius subtriplum sub eo. Postea anteriorandum est primum triplatum cum suo subtriplo per duas differentias. Deinde inveniendus est quidam digitus sub proxima figura ante triplatum, qui cum subtriplis ductus in triplata et postea sine subtriplis ductus in productum deleat totum suprapositum respectu triplatorum, deinde ductus in se cubice deleat totum suprapositum respectu sui, vel in quantum vicinius potest. Nec cessandum est a talis digiti inventione, nec a digiti inventi triplatione, nec a triplatorum anterioratione per duas differentias, nec a subtripli sub triplo positione, nec a tali multiplicatione, nec a tali subtractione, donec perventum sit ad primam figuram, sub qua inveniendus est quidam digitus, qui cum subtriplis ductus in triplata, deinde sine subtriplis ductus in productum deleat totum suprapositum respectu triplatorum, deinde ductus in se cubice deleat totum respectu sui, vel in quantum vicinius potest. Notandum etiam, quod productum proveniens ex ductu digiti inventi cum subtriplo vel subtriplis in triplatum et postea sine subtriplo vel subtriplis in productum, et iterum productum, quod provenit ex ductu digiti inventi in se cubice, possunt addi et simul subtrahi a totali numero supraposito respectu digiti inventi, et idem est, ac si fiat divisio. Hoc autem facto aut erit aliquid residuum, aut nichil. Si nichil, constat, quod numerus propositus fuerit cubicus, et eius radix est digitus ultimo inventus praepositus cum subtriplo vel subtriplis. Quae radix si ducatur in se et postea in productum, erunt figurae eaedem, quae prius fuerunt.

Si autem aliquid fuerit residuum, reservetur illud exterius in tabula, et constat, quod numerus ille non fuerit cubicus, sed digitus ultimo inventus cum subtriplo vel subtriplis est radix maximi cubici sub numero proposito contenti; quae radix si ducatur in se et postea in productum, emerget ille cubicus maximus sub numero proposito contentus, et si illi cubico addatur residuum reservatum in tabulis, erunt eaedem figurae, quae prius fuerunt. Si autem aliquis digitus post anteriorationem inveniri non possit, ponatur cyfra sub quarta figura versus dextram ⟨et sub illa cyfra etiam cyfra⟩, et anteriorandae sunt figurae ut prius. Notandum ⟨etiam⟩, quod, si in numero proposito non est aliquis locus millenarii, incipiendum est operari sub prima figura. In hac autem radice extrahenda solent quidam distinguere numerum propositum per ternarios, et incipere operari sub prima figura ultimi ternarii sive completi sive incompleti. Qui modus operandi idem est cum praedicto. Et haec de radicum extractione dicta sufficiant tam in numeris quadratis quam in cubicis.

EXPLICIT.

II. COMMENTUM MAGISTRI PETRI PHILOMENI DE DACIA, BONI COMPOTISTAE IN VILLA PARISIENSI, SUPER TEXTUM ALGORISMI.

Omnia, quae a primaeva rerum origine processerunt. In hoc tractatu determinatur de arte numerandi sive de numero practico, in quo auctor sic procedit. Primo enim in praemittendo prohemium aperit intentionem rerum dicendarum in hoc tractatu, secundo de intento prosequitur ibi: *Est enim numeratio.* In prohemio quatuor causae tanguntur per ordinem huius operis. Primo tangitur causa finalis, secundo efficiens, tertio materialis, quarto formalis. Et est iste ordo congruus vel communis. Finis enim movet efficientem, efficiens disponit materiam ad introductionem formae. Causam autem finalem tangit, cum dicit: *Omnia, quae a primaeva* etc^a; causam efficientem tangit, cum dicit: *Hanc autem scientiam numerandi compendiosam* etc^a; causam materialem tangit, cum dicit: *Numerus quidem dupliciter notificatur*; et causam formalem, cum dicit: *Huius autem artis novem sunt species.* Causa autem finalis huius artis est perfecta cognitio omnium, quia, sicut probat auctor, ars numerandi est cooperativa in universa rerum cognitione. Quo ostenso satis erit accidens de fine huius artis. Ad probandum autem istud accipit quandam probationem a Boetio in *arismetrica* sua. Dicit igitur: *Omnia, quae a primaeva rerum origine processerunt, formata sunt ratione numerorum*; vult dicere, quod omnia processerunt in esse sub aliquo numero, quia unum sub ratione unitatis, duo sub ratione binarii seu

dualitatis, et sic de aliis. Et tunc subdit aliam propositionem acceptam ab ARISTOTILE *secundo metaphysicae* dicens, quod, *sicut res sunt, sic cognosci habent*; ex quibus infert conclusionem dicens: *unde ars numerandi est cooperativa in universa rerum cognitione.* Quasi sic argueret: Omnia sicut sunt, sic cognosci habent; sed omnia sunt sub aliquo numero; sic sequitur conclusio: ergo ars numerativa valet ad cognitionem omnium. Huius rationis primo ponit minorem; secundo ponit maiorem, cum dicit: *Et quemadmodum sunt*; et tertio ultimam conclusionem ibi: *unde in universa.* Prima, sicut dictum est, scribitur in *arismetrica* BOETII et sub his verbis: *Omnia, quaecumque a primaeva rerum natura constituta sunt, numerorum videntur ratione formata.* Et subdit ibi BOETIUS: *Hoc enim fuit principale in animo conditoris exemplar. Hinc enim quatuor elementorum multitudo numerata est, hinc temporum vices, hinc motus astrorum caelique conversio.* Cognitio igitur omnium est huius artis finis secundum auctorem; sed ego credo, quod finis in mediatione eius est astronomia. Est enim practica huius artis sicut instrumentum inquirendi quantitates motuum caelestium.

Tunc sequitur illa pars: *Hanc igitur scientiam numerandi*, in qua tangit causam efficientem huius artis; et patet. Sed est notandum, quod aliud est, dicere causam efficientem huius artis, et aliud est, dicere causam efficientem huius tractatus. Qui enim artem hanc numerandi tradidit, erat quidam philosophus ALGUS nomine *Arabicus* ex principiis et conclusionibus arismetricae eam eliciens; qui autem hunc tractatum edidit, erat *Latinus* aliquis, et dicitur, quod ⟨erat quidam⟩ IOHANNES DE SACROBOSCO artem hanc diffusius ab ALGO philosopho traditam succincte in numerum brevem capitulorum redigens et compilans. Tunc sequitur illa pars: *Numerus quidem*, in qua tangit causam materialem huius artis, quae est numerus, et facit duo. Primo describit numerum, et secundo, quia in descriptione numeri usus est unitate, ideo etiam notificat, quid

sit unitas, cum dicit: *Unitas vero est.* Dat igitur duas descriptiones numeri, unam acceptam a materia, et aliam acceptam a forma. Dicit igitur: *Numerus quidem* etcª, et patet in littera. Sed notandum, quod, cum dicit: *numerus est unitates collectae*, sola materia numeri tangitur, sicut si describatur sive diffiniatur domus sic: *Domus est cooperimentum constans ex lignis et lapidibus, prohibens corruptiones a ventis, ymbribus et caumatibus. (Ex primo de anima).* Sed cum dicitur, quod *numerus est multitudo ex unitatibus profusa*, tangitur forma numeri. Multitudo enim resultat ex aggregatione unitatum; sed, sicut vult Avicenna in sua *metaphysica*, in his, quae aggregationem sumunt, compositio vel aggregatio est ex forma. Tunc sequitur: *Unitas vero* etcª. Quia (in) describendo numerum usus est unitate, ideo in parte ista notificat, quid sit unitas, et patet, quia *unitas est, qua unaquaeque res dicitur una.* Sequitur pars illa: *Numerorum vero*, in qua dividit numerum, et facit duo. Primo enim praemittit divisionem numeri, et secundo membra divisionis declarat. Secunda ibi: *Digitus quidem est* etcª. Divisio autem numeri ibi data est trimembris, et patet de littera. Cum dicit: *Digitus* etcª, declarat membra dividentia numerum, et facit tria. Primo enim declarat, quis numerus sit digitus; secundo, quis numerus sit articulus; tertio, quis numerus sit compositus sive mixtus; et patent partes. Dicit ergo primo, quod *digitus est omnis numerus minor denario*, id est minor quam decem, ut unitas, large accipiendo numerum, et binarius, et ternarius etcª. Sequitur illa pars: *Articulus est* etcª. Notificat, quid sit articulus, dicens, quod *articulus est omnis numerus, qui dividi possit in decem partes aequales praecise*, ut X, XX, XXX, centum, mille etcª. Decem dividi potest in decem partes aequales, quarum quaelibet pars est unitas; et XX in decem partes, quarum quaelibet pars est binarius; et XXX in decem partes, quarum quaelibet pars est ternarius; et centum in decem partes aequales, quarum quaelibet est denarius sive decem; et mille in decem partes aequales, quarum quaelibet

partium est centum. Omnis igitur ille numerus, qui ex puris denariis componitur, sive in decem praecise resolvitur, est articulus. Sequitur pars illa: *Compositus sive mixtus*, in qua notificat, quid sit numerus compositus sive mixtus, et facit duo. Primo enim facit, quod dictum est, et secundo dat regulam et modum cognoscendi universaliter omnem numerum compositum sive mixtum ibi, cum dicit: *Et sciendum.* Dicit primo, quod *numerus compositus sive mixtus est, qui constat ex digito et articulo,* ut XI, XII etc[a], XXI, XXII, XXXI, XXXII etc[a], CI, CII etc[a]. Tunc sequitur illa pars: *Et sciendum est, quod omnis numerus* etc[a], in qua dat regulam et modum cognoscendi omnem numerum compositum sive mixtum; et est ille, *qui est inter duos articulos proximos.* Et est notandum, quod articuli proximi sunt, quorum unus excedit alium tantum in denario, ut X et XX, vel XX et XXX etc[a], vel C et CX, vel CX et CXX etc[a]. Item nota, quod ille numerus dicitur esse inter duos numeros, qui maior est uno illorum et minor altero; et hoc modo quatuor sunt inter tria et quinque. Cum igitur decem et XX sic se habent, quod uterque est articulus, et alter excedit alterum tantum in decem, illi sunt articuli proximi. Omnes igitur numeri, qui sunt inter istos duos articulos, erunt compositi, quia semper quilibet eorum maior erit quam X, et minor quam XX; ratione enim, qua XV excedit X, continet X, et sic articulum, et ratione, qua exceditur a XX, continet digitum. Sequitur illa pars: *Huius autem artis*, in qua tangit causam formalem huius artis et tractatus. Et est notandum, quod duplex est forma artis scilicet et tractatus. Quaedam enim est forma artis sive tractatus in se, et haec consistit in divisione artis sive tractatus in capitula et capitulorum in suas partes; alia autem est forma artis sive tractatus, quae est modus quidam, quomodo ars est tradita; et modus iste aliquando est divisivus, aliquando diffinitivus, àliquando exemplorum positivus, aliquando etiam probativus et improbativus. Cum igitur dicitur, quod in hac parte ultima prohemii tangitur causa formalis huius artis sive tracta-

tus, intelligendum est de forma primo modo, quia dividit artem suam in decem species, et cum hoc dat modum et ordinem procedendi. Et ideo pars ista potest dividi in duas partes; primo enim dividit hanc artem, et secundo tangit modum et ordinem procedendi, cum dicit: *Inter quas primo de numeratione dicendum est.* Et comprehendit radicum extractionem sub una specie, quod forte facit, quia idem numerus potest esse quadrati et cubici radix, sicut patebit infra.

PRIMA SPECIES, SCILICET DE NUMERATIONE.

Est autem numeratio etc[a]. Hic incipit pars executiva, et habet partes novem iuxta numerum novem specierum huius artis, et patent partes. Primo igitur agit de numeratione, quia instrumentum est in omnibus speciebus sequentibus; et facit auctor quatuor in hac specie. Primo enim describit numerationem, ⟨et secundo assignat numerum figurarum, per quas facimus numerationem⟩, et universaliter omnes alias species huius artis, et ⟨tertio⟩ dat regulas in numeratione observandas, et quarto subdit duo notabilia; et incipit secunda pars ibi, cum dicit: *Sciendum igitur quod iuxta novem limites*; et tertia ibi: *Notandum igitur, quod quilibet digitus*; quarta ibi: *Et sciendum, quod supra quamlibet figuram.* Circa primum duo facit, quia primo describit numerationem, et secundo, quia in descriptione numerationis utebatur figura, quam in sequentibus confundit cum differentia, loco et limite, ideo convenientiam istorum quatuor et eorum differentiam dat. Secunda incipit, cum dicit: *Figura vero.* Dicit ergo primo, quod *numeratio est artificialis repraesentatio cuiuslibet numeri per figuras sibi competentes.* Dicas sic exponendo hanc descriptionem numerationis, quod numeratio est repraesentatio numeri; ducitur scilicet de dicto in scriptum et de scripto in dictum. De dicto in scriptum, cum, sicut pronuntiamus numerum ipsum, ita scribimus; de scripto in dictum, cum, sicut scriptus est, pronuntiamus. Et ob hoc dicitur, quod numeratio est repraesentatio numeri arti-

ficialis, ad differentiam naturalis, qua antiquitus numeri repraesentabantur. Antiqui enim volentes repraesentare unitatem, vel binarium, vel ternarium, unum tractum vel duos vel tres scripserunt, scilicet I, II, III, IIII etc[a]. Item dicitur, quod numeratio est repraesentatio numeri artificialis per figuras sibi competentes. Non enim omnis numerus per quascumque figuras Indorum repraesentatur, sed tantum determinatus per determinatam, ut 4 non per 5, nec 5 per 4, sed 4 per 4 et 5 per 5. Et per hoc, quod auctor dicit, quod numeratio est repraesentatio cuiuslibet numeri, notat sufficientiam artis in hac specie traditam, quia se extendit ad omnem numerum. Tunc sequitur illa pars: *Figura vero.* Quia in descriptione numerationis posuit figuram, et quia inferius confundit haec quatuor nomina unum accipiendo pro altero, scilicet figuram, differentiam, locum et limitem, ideo hic assignat eorum ad invicem convenientiam et ad invicem differentiam, et primo convenientiam, secundo differentiam, cum dicit: *sed a diversis.* Dicit ergo quod *figura, differentia, locus et limes idem hic significant, tamen a diversis rationibus imponuntur*, quia alia est ratio, quare vocatur figura, et alia, quare dicitur differentia etc[a]. Quia, sicut dicit auctor, *figura dicitur, quantum ad linearum protractionem*, id est, quia sic vel sic lineata sive figurata est; et illud idem vocatur *differentia, quia per eam ostenditur, qualiter figura sequens differt a praecedente*, quia aliud significat figura eadem in primo loco et aliud in secundo; et illud idem et *locus dicitur ratione spatii, in quo scribitur; vocatur* etiam *limes* illud idem, *quia* figura in genere sumpta *est via ordinata ad repraesentationem cuiuslibet numeri.* Nota igitur, quod illud, pro quo omnia haec quatuor supponuntur vel accipiuntur, est ut instrumentum universale in numerando, ⟨et vel accipitur ratione viae ordinatae ad repraesentationem cuiuslibet numeri⟩, et sic vocatur limes, quod idem ⟨est,⟩ quod via; vel accipitur ratione spatii, in quo scribitur, et sic vocatur locus; vel ratione talis lineationis, et sic vocatur figura; vel in quantum figura

scripta differat a se vel ab alia scripta alibi, et sic vocatur differentia. Deinde cum dicit: *Sciendum igitur*, assignat numerum figurarum, quae sunt, per quas fit omnis numeratio et similiter aliae species huius artis, et facit tria. Primo enim ostendit, quae et quot sint figurae in universo significativae, et secundo addit conditiones cuiusdam figurae non significativae, et tertio probat sufficientiam figurarum. Secunda pars incipit ibi: *Decima vero 0 dicitur teca*; tertia ibi: *Cum igitur per has novem figuras.* Dicit ergo primo, quod secundum numerum novenarium novem limitum inveniuntur novem figurae significativae repraesentantes novem digitos, quae tales sunt:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Quomodo autem novem digiti, qui accipiuntur secundum novem limites, non transcendunt novenarium numerum, dicetur in de radicum extractione. *Decima vero:* hic addit conditiones cuiusdam figurae non significativae, et primo facit hoc, secundo removet dubium, cum dicit: *Ipsa tamen locum.* Dicit, quod decima figura habet quatuor nomina, quia dicitur teca, circulus, cyfra vel figura nichili; et subdit, quare vocatur figura nichili, *quia nichil significat.* Quare autem aliis nominibus vocetur, non dicit auctor, quia omnia alia nomina habent rationem suae lineationis sive figurationis. Quia rotunda est, dicitur haec figura teca ad similitudinem tecae. Teca enim est ferrum figurae rotundae, quod ignitum solet in quibusdam regionibus imprimi fronti vel maxillae furis seu latronum. Haec etiam figura dicitur circulus, quia est figura circularis; vocatur etiam cyfra, quasi circumfacta vel circumferenda, quod idem est, quod circulus non habito respectu ad centrum. Deinde cum dicit: *Ipsa tamen locum tenens*, removet dubium. Quia ⟨enim⟩ dixit, quod haec decima vocatur propter hoc figura nichili, quia nichil significat, dubitaret forte aliquis, quare inter figuras huius artis annumeretur; ideo removet hoc dubium dicens, quia, licet ipsa per se sumpta nichil significat, ipsa ⟨tamen⟩ tenens, id est occupans, locum dat aliis significare; nam, sicut dicit auctor, arti-

culus purus non potest scribi sine cyfra vel cyfris. Sine cyfra enim non scribitur aliquis articulus minor quam centum, et nullus alius articulus scribitur, quin ibi sint duae cyfrae vel ad minus una, sicut dicetur infra in hoc eodem capitulo. Patet igitur, quod, licet cyfra per se nichil significat, ipsa tamen dat aliis significare. Decem igitur sunt figurae, novem significativae et una non significativa. Deinde cum dicit: *Cum igitur per has novem figuras*, probat sufficientiam figurarum, scilicet quod non est opus plures figuras significativas esse quam has. Dicit igitur, quod, cum per has novem figuras significativas adiunctis quandoque una cyfra, quandoque cyfris pluribus contingat quemlibet numerum repraesentare, ideo non fuit necesse pluris figuras significativas inveniri. Quasi auctor sic argueret: Tot figurae significativae sunt necessariae et non plures, quot cyfris additis omnis numerus repraesentatur. Sed omnis numerus per has novem figuras significativas repraesentatur cyfris additis: ergo tot figurae significativae et non plures sunt necessariae. Nota, quomodo Algus ad hoc devenire potuit, ut per has decem figuras omnis (numerus) repraesentetur. Vidit enim, quod omnis numerus crescendo vadit per decem, ut ab uno ad decem, ab XI ad XX, ab XXI ad XXX, et ita de aliis, ita quod semper addendo digitos eosdem ad articulum aliquem proceditur ad articulum superiorem; et ad hoc forte advertens Philosophus species numerorum dixit solum esse decem. *Facit enim numerum usque ad decem*, sicut dixit Philosophus *tertio physicorum capitulo de infinito*. Deinde cum dicit: *Notandum igitur, quod quilibet digitus* etc[a], dat regulas hanc scientiam rectificantes et nos in hac specie dirigentes, et facit duo. Primo enim dat tres regulas dirigentes nos in scribendo quemlibet numerum, et secundo dat unam regulam dirigentem nos in legendo et pronuntiando quemlibet numerum scriptum. Secunda pars ibi: *Notandum etiam*. Prima pars habet tres partes iuxta numerum trium regularum; secunda est ibi: *Omnis vero numerus*; tertia ibi: *Omnis quidem numerus*. Prima regula sumitur per respectum

ad figuras in se, secunda per respectum ad ordinem et situm figurarum, et tertia per respectum ad numerum figurarum. Dicit ergo primo, quod *omnis digitus habet scribi per unam solam figuram sibi appropriatam, omnis vero articulus habet scribi per cyfram primo loco positam et per digitum, a quo denominatur ille articulus.* Omnis enim articulus ab aliquo digito denominatur, ut denarius denominatur ab unitate, vigenarius a binario etc^a. Nota hic: cum auctor dicit, quod omnis articulus habet scribi per cyfram, hoc intelligendum est de articulis principalibus, qui scilicet minores sunt quam centum. Isti enim per unam cyfram et digitum articuli habent scribi; sed omnis articulus a principalibus articulis usque ad mille scribitur per duas cyfras primo loco positas et per digitum articuli. Item nota, quod, quanto aliquid in hac tota arte numerandi est dexterius, tanto est prius, et quanto aliquid magis est versus sinistram, tanto est posterius; et ideo, cum auctor dicit, quod cyfra primo ⟨loco⟩ debet poni, intelligendum est sic, quod debet poni ad dextram. Deinde cum dicit: *Omnis vero numerus in eo, quod est digitus*, dat secundam regulam sumptam per respectum ad ordinem et situm figurarum, et patet; et vocatur etiam ⟨hic⟩ articulus aliquis ex principalibus. *Omnis quidem numerus:* dat tertiam regulam sumptam per respectum ad numerum figurarum inter se, et patet. Dicit autem: *ut centenarius excludatur*, quia ipse scribitur tribus figuris sic: 100; dicit etiam: *ut millenarius excludatur*; ipse enim millenarius quatuor figuris scribitur sic: 1000. Tunc sequitur illa pars: *Notandum etiam, quod quaelibet figura*, in qua, postquam auctor dedit tres regulas rectificantes nos in scribendo quemlibet numerum, dat convenienter unam regulam rectificantem nos in legendo et pronuntiando quemlibet numerum scriptum; et vult dicere, *quod quaelibet figura primo loco*, scilicet versus dextram, *posita repraesentat suum digitum*, id est illud, ad quod significandum primo fuit imposita, et *in secundo decies tantum, et in tertio loco centies tantum, et in quarto loco millesies tantum* etc^a.

Et comprehendit totum hunc processum sub una regula tali: *Quaelibet figura sequenti loco posita decies tantum significat, quanto in loco praecedenti* versus dextram. Verbi gratia 9999. Ille novenarius, qui est primus versus dextram, tantum significat, quantum fuit impositus ad significandum, scilicet novem unitates. Secundus autem novenarius significat decies tantum, scilicet decies novem, quod est nonaginta; et tertius numerus novem valet nongenta, et quartus decies nongenta valet, quod est novem milia, et sic de omnibus aliis digitis est intelligendum, et usque in infinitum procedendo. Deinde cum dicit: *Et sciendum, quod supra quemlibet figuram*, subdit duo notabilia. Secundum ibi: *Sinistrorsum autem.* Et est primum quasi cautela quaedam, qua instrui videmur ad faciliter computandum sive pronuntiandum omnem numerum scriptum; et est, quod, si proponitur nobis aliquis magnus numerus, computandae sunt figurae per millenarios, id est per quatuor, et *supra quamlibet figuram loco millenarii positam competenter potest poni quidam punctus, ad denotandum, quod tot millenarios ultima figura debet repraesentare*, id est, totiens habet millenarius supra ultimam replicari, *quot fuerunt puncta pertransita*, id est, quot fuerunt puncta supraposita. Verbi gratia: sit numerus propositus iste: 9876543210. Computa igitur figuras incipiendo a dextris, et erit ternarius in quarto loco; supra quem ponas punctum. Item idem ternarius respectu sequentium est in primo loco, et senarius in loco quarto erit; supra ipsum igitur 6 ponas punctum. Item idem senarius respectu sequentium est in primo loco, et novenarius in quarto ⟨erit⟩; ponas igitur etiam unum punctum supra ipsum, et stabunt figurae isto modo:

$$\dot{9}87\dot{6}54\dot{3}210.$$

Supra novenarium igitur replicabitur millenarius ter sic: Novies millesies mille milia, et supra octonarium bis sic: octingentesies mille milia, septuagesies mille milia etc^{a}, pronuntiando aliquando sic id ipsum totum: Novies millesies mille milia octingentesies septuagesies sexies mille milia quingenta quadraginta tria

milia ducenti decem. Tunc sequitur illa pars: *Sinistrorsum autem scribimus*, in qua ponit quoddam aliud notabile, et quoddam removet dubium, quia dixerat superius, quod articulus scribitur per cyfram primo loco positam et per digitum illius articuli positum versus sinistram, ubi innuitur: locus primus est versus dextram. Dubitaret igitur forte aliquis, quare ita scribimus in hac arte, cum tamen in aliis artibus incipimus semper scribere a sinistra eundo versus dextram, ita quod, quanto aliquid est sinistrius, tanto est prius; hic autem est e contrario. Resolvendo igitur dubium facit duo, scilicet quod dat duas rationes, quare nos in hac arte scribimus sinistrorsum ⟨vel⟩ versus sinistram, incipiendo a dextra. Prima autem ratio. quare in hac arte sic scribendum est, ⟨ista⟩ est, quia Arabes, apud quos haec scientia inventa est, hoc modo scribunt, sicut etiam faciunt Hebraici. Et tunc dat aliam rationem ad idem et dicit, quod hoc modo scribimus in hac arte vel propter id, quod iam dictum est, vel etiam hac ratione, ut semper pronuntiando aliquem numerum maiorem praeponamus minori secundum ordinem et modum consuetum in loquendo. Ad intellectum autem huius partis est notandum, quod nos Latini assueti sumus in loquendo seu pronuntiando aliquem numerum semper praemittere maiorem numerum minori, ut dicendo triginta unum, triginta duo praeponamus triginta ante unum vel ante duo; et similiter dicendo centum et decem vel centum et viginti praemittimus centum ante decem vel ante viginti. Item secundo suppono, quod, quanto aliqua figura est sinistrior, tanto est posterior; item per praehabita sciendum, quod, quanto aliqua figura est posterior, tanto maiorem numerum repraesentat. Cum igitur omnis numerus, quanto fuerit posterior, tanto est maior, et nos pronuntiando a maiori incipimus, in pronuntiando incipiemus a posteriori, sicut probatum est. Sed quanto aliqua figura est posterior, tanto est sinistrior per secundam suppositionem: ergo pronuntiando incipiemus a sinistriori. Sic igitur incipiendo consuetum ordinem servabimus in legendo, quia

praemittendo id, quod sinistrius est, praemittimus numerum maiorem, sicut consueti sumus facere pronunciando aliquos numeros. Ulterius notandum, quod Latini et universaliter omnes communicantes linguae latinae, sicut sunt Lumbardi et Gallici, similiter semper praeponunt maiorem numerum minori, cum pronuntiare debent aliquos numeros compositos ex digito et articulo vel ex duobus articulis differentibus. [1] Dicit enim Latinus viginti duo vel centum et viginti praemittendo viginti ante duo et centum ante viginti; et similiter Lumbardus, Gallicus et Graecus. Sed haec regula fallit in sex numeris primis compositis: dicimus enim et nos Latini undecim, duodecim, tredecim, quatuordecim, quindecim, sedecim semper praeponendo digitum, cum tamen minor sit. Sed quare in his numeris sic oporteat minorem maiori praeponere, et quare in tot et non in pluribus, causa est notabilis. Et quare primo in his numeris hoc oporteat fieri, causa est, quia, sicut dictum est, haec ars computandi inventa est apud Arabes, qui in pronuntiando semper in omnibus numeris minorem praeponunt maiori, ut universaliter omnes barbari, scilicet Theutonici sive Alemani, Anglici et omnes his in linguaggio communicantes. Quia igitur Arabes in pronuntiando minorem numerum praeponunt maiori, nos, cum ars numerandi primo ab eis nobis ⟨sit⟩ tradita, in primis numeris eos sequimur, in quibus scilicet ⟨dictum est⟩ numeris; in aliis id minus attenditur. Sunt ⟨tamen⟩ numeri compositi primi 9; quare in 6 et in 6 tantum? Dico, quod hoc est, quia ars numerandi perfectionem primo sortita est ab Arabibus; ideo eos sequimur in numero primo perfecto, scilicet in senario. Si igitur, ut credo, quae dicta sunt, veritatem habent, non bene pronuntiant, qui dicunt septendecim, vel qui dicunt octodecim, sicut quidam solent dicere.

SECUNDA SPECIES, DE ADDITIONE.

Additio est numeri vel numerorum ad numerum aggregatio etc[a]. In hac secunda specie, quae est additio, facit auctor

duo. Primo enim determinat intentionem suam, et secundo dat quoddam notabile hic et in omnibus aliis speciebus sequentibus huius artis observandum. Secundum ibi: *Notandum etiam* etc[a]. Circa primum duo facit. Primo enim diffinit auctor additionem, et secundo docet, qualiter in ea est operandum. Secundum ibi: *Si velis igitur* etc[a]. Adhuc primo in duas, quia primo facit, quomodo dictum est, et secundo tangit, quae et qualiter se habentia ad additionem exiguntur. Secunda ibi: *In additione duo ordines.* Primo hic diffinit additionem et cum hoc exprimit finem et utilitatem, cui additio deservit. Dicit ergo, quod *Additio est aggregatio* etc[a]: hoc est sua diffinitio seu descriptio; *ut videatur summa:* per hoc tangit finem et utilitatem, cui deservit. Si igitur aliquis habeat in aliquo loco 158 libras et quodam alio loco 98 libras, et tunc scire velit, quantum istud est in universo, hoc est utilitas additionis, et hoc fit aggregando unum numerum ad alterum vel unam summam ad aliam. Deinde cum dicit: *In additione vero*, tangit, quae et qualiter se habentia ad additionem exigi dicuntur, et hoc innuebatur in descriptione additionis, quia, cum dixit, quod *additio est aggregatio numeri ad numerum*, innuebat, quod exigitur unus numerus addendus et alius, cui addi debet. Et ideo facit hic duo. Primo enim dicit, quod *duo ordines figurarum, id est duo numeri, sunt in additione necessarii, scilicet numerus, cui fieri debet additio, et numerus addendus*; et in hoc tangit, quae ad additionem exiguntur. Et secundo, cum dicit: *Numerus, cui fieri debet additio* etc[a], tangit, qualiter haec duo se habent, quae ad additionem exiguntur, quia docet ibi, qualiter numeri isti ordinari debent; et patet secundum in littera. Tunc sequitur illa pars: *Si velis igitur*, in qua docet, qualiter in hac specie operandum est. Primo disponit figuras, et secundo istis dispositis exequitur de intento ibi, cum dicit: *Hoc autem facto* etc[a]. Dicit: *Si ergo velis addere numerum numero*, scilicet ut videatur summa totius, *tunc scribe numerum, cui fieri debet additio, in superiori ordine*, id est superius, *per suas differen-*

tias vel figuras, et numerum addendum in inferiori ordine per suas differentias, et ita, quod prima inferioris ordinis sit sub prima superioris ordinis etc^a. Esto igitur, quod tu velis scire summam, quae producitur ex additione 98 ad 158; tunc ordinabis hoc modo figuras:

158
98.

Sicut enim dictum est superius, quanto aliqua figura est dexterior, tanto est prior, et ideo 8 in utroque ordine est figura prima, et 9 in inferiori ordine est secunda, et 5 in superiori ordine est secunda. Tunc sequitur illa pars: *Hoc autem facto*, in qua exequitur de modo operandi figuras dispositas. Et quia additio completur et perficitur addendo quamlibet inferioris ordinis ad figuram (suprascriptam) superioris ordinis, ideo auctor duo facit. Primo enim docet operari addendo primam inferioris ordinis ad primam superioris ordinis, et secundo innuit operationem eandem et eundem modum operandi in aliis figuris, cum dicit: *Quo facto addatur secunda secundae.* Item, quia addendo numerum ad numerum semper resultat numerus tertius diversus, ideo auctor circa primum duo facit. Primo enim addendo primam figuram numeri inferioris ordinis ad primam numeri superioris ordinis praemittit quandam divisionem circa numerum excrescentem ex additione primae ad primam, et secundo docet quomodo circa unumquodque membrum dividentium sit agendum. Secunda ibi: *Si digitus.* Dicit igitur primo: *Hoc facto*, id est, cum sic ordinaveris figuras, *addatur prima inferioris ordinis primae superioris ordinis. Ex tali igitur additione aut excrescit digitus* etc^a. *Si digitus:* exequitur de membris dividentibus, docens iuxta singulum operari, et facit tria secundum tria membra dicta divisionis. Primo enim dat modum operandi, cum numerus excrescens fuerit digitus; secundo, si fuerit articulus; et tertio, si fuerit numerus compositus. Secunda pars statim post incipit scilicet ibi: *Si articulus*, et tertia ibi: *Si excrescat numerus compositus.* Vult primo dicere, quod,

si addendo primam figuram inferioris ordinis ad primam superioris ordinis provenit digitus, tunc prima superioris ordinis debet deleri, et loco eius ille digitus poni, qui provenit ex tali additione. Verbi gratia: si prima superioris ordinis est 4, et prima inferioris ordinis 3, tunc addendo tres ad quatuor excrescent 7, qui est quidam digitus, qui loco quaternarii debet poni, scilicet ipso quaternario deleto. *Si articulus:* docet, qualiter sit operandum, si excrescit articulus; et hic notandum, quod, quia locus primus non est locus articuli, sicut dictum est in capitulo proximo praecedenti, ideo oportet articulum versus sinistram ponere in loco secundo. In loco secundo ergo aut est figura aliqua, aut nulla; item, si aliqua, aut significativa aut non significativa; item, si significativa, aut est 9 aut alia figura a 9. Hanc autem divisionem innuit auctor docens iuxta quodlibet membrum eius operare, et facit quatuor. Primo enim docet, quid generaliter sit faciendum, si in loco secundo fuerit figura; et secundo, quid sit faciendum, si non sit ibi figura aliqua; et tertio in speciali docet, si in eodem loco sit cyfra 0, quid tunc sit agendum; et quarto, quid faciendum sit, si in secundo fuerit novenarius. Secunda pars incipit ibi: *Si autem non ... ponatur*; tertia ibi: *Si autem contingat*; et quarta ibi: *Si sit figura 9.* Vult ergo dicere primo, quod, si ex additione primae figurae ad primam provenit articulus, ut si superior fuerit 7 et inferior 3, sive superior 8 et inferior 2, et sic de aliis, tunc superiori deleta loco eius scribi debet cyfra 0, et sinistrari digitus, a quo denominatur articulus excresceus, et si est aliqua figura sequens, addendus est digitus ad istam sequentem versus sinistram, si aliqua figura sequitur. Nota hic, quod articulus proveniens ex additione alicuius figurae cuiuscumque ad aliquam aliam quamcumque semper est denarius, et ideo digitus addendus ad figuram sequentem semper est unitas. Si ergo in loco secundo fuerit 3, iam erit quaternarius, et si fuerit 4, iam erit quinternarius etc[a]. Deinde cum dicit: *Si autem*, docet quid faciendum sit de articulo proveniente ex

additione primae figurae ad primam, si in secundo loco non erit figura aliqua; et continuatur sic: si figura erit in loco secundo, addendus est sibi digitus articuli, sin autem non, id est, si nulla sequatur, ponatur ille digitus in loco vacuo, id est in spatio vacante; et illud habet locum, quando in numero, cui debet fieri additio, non est nisi figura una. Deinde cum dicit: *Si vero contingit*, docet, quid agendum sit, quando in secundo loco fuerit cyfra 0, et patet. Tunc sequitur illa pars: *Si sit figura 9*, in qua docet, quid agendum sit, cum in secundo loco fuerit 9, et patet. Scilicet utaris hoc exemplo: Esto, quod numerus ille sit iste 397, cui addere velis 3. Ex additione igitur ternarii ad septem proveniunt decem. Unitatem igitur, a qua denominatur ille articulus, addas ad figuram sequentem, scilicet ad 9. Quia igitur haec unitas valet decem, et ille 9 valet 90, provenient 100, qui non capiuntur in loco suo secundo; et ideo debet 9 deleri; et loco suo debet poni 0, et unitas addenda est ad figuram sequentem, et tunc stabunt figurae sic: 400. Deinde cum dicit: *Si excrescat numerus compositus*, docet operari, cum numerus excrescens fuerit compositus, et ex dictis patet. Verbi gratia: Sit numerus iste 349, cui addere oportet 7; addendo igitur 7 ad 9 resultant 16, quod est numerus compositus. Dele igitur 9, et loco eius scribas 6, qui est altera pars illius numeri compositi, scilicet digitus; et 1 addas ad 4 pro illo denario, ⟨qui est digitus⟩ articuli, qui est altera pars illius numeri compositi, et facta additione stabunt figurae sic: 356. Et iam visi sunt omnes casus, qui contingere possunt in additione primae ad primam. Et tunc, cum dicit: *Hoc facto*, innuit eundem modum operandi in additione secundae ad secundam, ⟨et eundem⟩ de aliis, quia nichil debet immutari; quia, si ex additione secundae inferioris ordinis ad secundam superioris ordinis provenit digitus, ponendus est loco superioris deletae; si articulus resultat, tunc 0 ponenda est loco superioris deletae, et digitus articuli addendus est ad figuram sequentem, si figura sequatur; alioquin ponatur in spatio vacante, sicut supra satis

docebatur. Deinde cum dicit: *Notandum etiam*, dat unum notabile sive documentum, quod in hac specie et in omnibus aliis sequentibus est observandum; et est illud, quod in hac specie et in omnibus aliis sequentibus, quando una figura alteri directe supraponitur, utendum est qualibet illa figura, ac si per se ibi in primo loco poneretur. Verbi gratia: Esto, quod tu velis addere 98 ad 176: posita prima inferioris ordinis sub prima superioris ordinis stabunt figurae utriusque ordinis sic:

176
98

Sicut igitur addendo primam ad primam, scilicet 8 ad 6, ita eadem modo addendo secundam ad secundam debes dicere 9 ad 7, licet 9 valet ibi nonaginta et 7 septuaginta; et causa huius est, ne involvatur intellectus. Si enim diceres 90 ad 70, iam involveris de facili, nec scires, quid esset et quomodo facere deberes. Item ex alia parte, quia utendo qualibet, ac si per se poneretur, et in primo loco, idem perveniet, quod modo proveniret, si utereris quolibet ut articulo. Et ut innuas omnes casus circa hanc speciem emergentes, utaris hoc exemplo. Sit numerus, cui velis addere alium, iste: 98706, et numerus addendus iste: 12345; et locatis singulas sub singulis sic:

98706
12345,

addas tunc primam inferioris ordinis directe sibi suprapositae, et resultabit numerus compositus, scilicet 11; deleas igitur 6 et loco eius ponas 1, qui est digitus illius compositi, et unitatem, quae est digitus articuli, ponas loco nichili, et stabunt figurae post additionem primae ad primam isto modo:

98711
12340.

Quo facto addas secundam ad secundam, scilicet 4 ad 1, et resultat digitus, scilicet 5, qui ponatur loco unitatis, et tunc stabunt figurae sic:

98751
12300.

Addita enim secunda ad secundam figuram loco figurae additae, sive quae est addita, poni debet cyfra, ne figurae sequentes minus significent; et hoc intelligas de omnibus aliis sequentibus figuris. Deinde addas tertiam ad tertiam, scilicet 3 ad 7, et excrescat articulus, scilicet denarius. Loco igitur 7 deleti ponatur cyfra 0, et unitas, quae est digitus articuli, addatur ad figuram sequentem, scilicet ad 8, et stabunt figurae hoc modo:

99051

12000.

Hoc facto addas quartam ad quartam, scilicet 2 ad 9, et excrescent 11; unitatem ergo ponas loco 9, et unitatem, quae est digitus articuli, addas ad 9 sequentem, et erunt 10. Dele igitur 9, et loco eius ponas cyfram, et unitatem, quae est digitus articuli, ponas in spatio vacante ad sinistram hoc modo:

101051

10000.

Deinde addas ultimam ad sibi suprapositam, scilicet unitatem ad 0, et erit 1. Si ergo 1 ponas loco 0, stabunt sic omnes figurae numeri aggregati ex additione numeri addendi ad alium: 111051, qui continet in se utrosque numeros primo propositos. Quod si scire velis, utrum bene addidisti nec ne, tunc diligenter notes accipere numeros primo positos, scilicet 98706 et similiter istum 12345, et utendo qualibet figura, ac si per se poneretur, abice semper 9. Verbi gratia: numerus addendus erat talis 12345; collige omnes figuras simul, et erunt 15; abicias ergo 9, et remanent 6, quae reserves in tabula. Deinde sumas numerum, cui addidisti, scilicet 98706, et similiter utendo qualibet figura, ac si per se poneretur, colligas omnes simul et abicito semper 9, residuum serves; et sunt 3 in residuo, quae addas ad 6 prius reservata, et erunt 9 in universo; quibus etiam abiectis 9, quia 9 sunt, nichil remanebit; et dicas tunc, quod proba huius additionis est 0. Est enim proba in qualibet specie residuum abiecto quotiens potest 9. Hoc facto recolligas omnes figuras numeri aggregati, et abiectis semper

9 serva residuum, et invenies cyfram 0; nichil residuum scilicet ⟨est⟩ de hoc numero 111051, quia praecise valent novem. Abiectis igitur his cum nichil remanet, dices, quod proba numeri aggregati est 0; et ideo, quia etiam erat proba prima 0, bene addidisti. Est igitur regula, quod, si proba numeri aggregati est aequalis probae numerorum aggregatorum, bene addidisti; et tenet in virtute huius principii: ab aequalibus demptis aequalibus, quae relinquuntur sunt aequales.

SEQUITUR TERTIA SPECIES, DE SUBTRACTIONE.

Subtractio est propositis duobus numeris etc^a^. In hac specie tertia, quae est subtractio, facit auctor duo. Primum enim facit, quod intendit, secundo subdit quandam cautelam et modum examinandi, si recte actum est vel non in hac specie et in praecedente. Secunda pars incipit ibi: *Si autem probare*; et posset illa pars dividi contra omnia determinata in hoc capitulo et in praecedenti. Circa primam partem facit duo, quia primo facit, quomodo dictum est, et secundo removet dubium circa praemissa incidens. Secunda ibi: *Sciendum tamen.* Prima habet tres partes. Primo enim diffinit subtractionem, et secundo membra diffinitionis et conditiones diffinientium manifestat, et tertio se ordinat ad operandum. Secunda pars incipit ibi: *Minor autem de minori*; tertia ibi: *In subtractione.* Adhuc primo facit duo, scilicet quod dat duas diffinitiones subtractionis; secundam ibi: *vel subtractio est.* Haec est divisio. Primo dicit, quod *subtractio est propositis duobus numeris inventio excessus maioris numeri ad minorem.* Verbi gratia: Si habuerit aliquis 99 libras, et teneatur creditori in 64, tunc ad hoc, ut sciatur, deductis his 64 quantum remanet de 99, valet haec species. Propositis igitur talibus duobus numeris subtractio erit inventio cuiusdam numeri, in quo maior excedat minorem. Inventio ergo illius excessus est utilitas huius speciei; quod descriptio secunda clarius dicit ibi, cum dicit: *Vel subtractio est*, quod patet de se. Tunc sequitur illa pars: *Minor autem de maiori*,

in qua conditiones diffinientium manifestat, et facit duo. Primo enim facit, quod dictum est, et (secundo), quia locutus est de numero maiori vel minori, dat artem cognoscendi, quis numerorum propositorum est maior, cum dicit: *Ille quidem.* Et quia pars prima patet de se, vade ad sequentem. Ibi ex incidenti dat artem cognoscendi, quis numerus propositorum est maior, et dicit, quod *ille est maior, qui scribitur pluribus figuris ultima existente significativa.* Verbi gratia: licet 9 est maxima figurarum et 1 minima, tamen quatuor unitates 1111 maiorem numerum repraesentant quam tres 999. *Si autem tot sunt figurae in uno, quot sunt in reliquo, videndum est per (ultimas vel per) penultimas* etc^a, quis eorum scilicet est maior vel minor. Tot enim figuris existentibus in uno, quot sunt in altero, ille totus est maior, cuius ultima figura est maior, ut si sint isti duo numeri propositi 93, 89, ille est maior, cuius ultima est 9. Item si tot sunt in uno, quot sunt in reliquo, et tantum numerum repraesentat ultima unius, quantum ultima alterius, tunc cuius penultima est maior, totus est maior; ut si sint isti duo numeri propositi 983 et 973, ille est maior, cuius penultima est 8. Deinde cum dicit: *In subtractione* etc^a, ordinat se ad operandum, et facit tria. Primo enim tangit, quot numeri sunt hic necessarii, et secundo eos disponit in ordine, quo eis est utendum in operatione, et tertio de operatione prosequitur. Secunda pars ibi: *Numerus a quo*; tertia ibi: *Subtrahe igitur*; et patent partes duae primae. Ubi auctor exequitur de modo operandi, facit duo. Primo enim dat modum subtrahendi primam inferioris ordinis a prima superioris ordinis, et secundo innuit eundem modum in subtractione aliarum de aliis, cum dicit: *Hoc autem facto.* Primo facit duo. Primo enim tangit diversas habitudines primae inferioris ad primam superioris ordinis, et secundo iuxta quamlibet illarum habitudinum docet operari, cum dicit: *Si par* etc^a; et patet prima pars. Et illa pars: *Si par* etc^a, dividitur in tres partes iuxta numerum trium habitudinum primae ad primam; et incipit secunda pars ibi: *Si*

maior etcª; tertia ibi: *Si minor*. Exemplum primae partis. Sit mumerus iste subtrahendus 248, numerus, a quo fieri debet subtractio, 688. Ordinentur igitur sic figurae:

688
248.

Cum igitur prima inferioris ordinis sit aequalis primae superioris, deleas superiorem, et loco eius scribas cyfram, et tunc stabunt figurae post subtractionem hoc modo:

680
248.

Scilicet 0 ponitur loco superioris deletae, ne figurae sequentes eiusdem ordinis minus significent. Alioquin enim ibi deberent esse sexcenti octingenta, sed non essent ibi nisi sexaginta octo. *Si maior*: exemplum huius est: Sit numerus subtrahendus 248, numerus, a quo debet fieri subtractio,-469, et stabunt figurae sic:

469
248.

Cum igitur prima figura superioris ordinis sit maior quam ⟨prima⟩ figura inferioris, demas de superiori 8 unitates, et residuum, scilicet unitatem, ponas loco eius, et stabunt figurae sic:

461
248.

Deinde cum dicit: *Si minor* etcª, docet, qualiter sit negotiandum, quando prima figura superioris ordinis fuerit minor quam prima figura inferioris; et quia maior de minori subtrahi non potest, ideo a sequenti loco mutuandum est, quod deficit. Quia igitur figura loco secundo posita aliquando est significativa, aliquando non significativa, ideo auctor hic duo facit, quia primo docet operari, cum figura in secundo loco posita fuerit significativa, et secundo, cum non fuerit significativa. Secunda ibi: *Si autem figura*. Circa primum duo facit, quia primo docet operari cum figura secundo loco posita fuerit aliqua alia ab unitate, et secundo, cum fuerit unitas. Secunda ibi: *Si vero figura*. Dicit primo, quod, si maior fuerit prima inferioris ordinis quam prima

superioris ordinis, tunc, *quia maior de minore subtrahi non potest, mutuetur unitas a figura proxima sequente, quae unitas valet 10 respectu figurae praecedentis*, scilicet primae, quia quaelibet unitas in secundo loco posita valet decem, ut dicebatur supra. *Ab illo denario* in secundo loco sub forma unitatis accepto *et a figura, a qua fieri debuit* in principio *subtractio, simul iunctis subtrahatur figura inferior et residuum* etc[a]. Verbi gratia: sint numeri isti:

463
348.

Cum prima superioris ordinis, scilicet 3, sit minor quam 8, quae est prima inferioris, inferior de superiori subtrahi non potest. Accipiatur ⟨igitur⟩ 1 de 6, quae est figura proxima sequens, et quia quaelibet unitas in hoc 6 valet 10, haec unitas valet 10. In loco igitur 6 scribatur 5, et postea a denario accepto et a 3, a quo deberes subtrahere, subtrahas 8, et remanent 5, quae ponas loco ternarii sic:

455
348.

Si vero figura: docet, qualiter operandum est, cum figura illa sit unitas, a qua mutuandum est, et patet. Verbi gratia: sint isti numeri:

413
348.

Cum ergo non possint subtrahi 8 de 3, deleas 1, quae est in secundo loco, et quia illa valet 10, subtrahas 8 de 13, et remanent 5, quae reponas loco 3, et propter figuram sequentem ponas 0 loco 1, quam ⟨in⟩ loco secundo mutuatus es, sic:

405
348.

Tunc sequitur illa pars: *Si autem figura*, in qua docet, qualiter operandum est, cum in secundo loco fuerit 0, et facit duo. Primo facit, quod dictum est, et secundo dat causam operatio-

nis. Et incipit secunda pars ibi: *Ratio autem*, et patet in littera. Verbi gratia: sint numeri isti:

405
348.

Quia non poteris subtrahere 8 de 5, mutuo accipias de figura sequenti. Cum ergo ipsa sit 0, de sequenti, scilicet de 4, sumas 1, et residuum, scilicet 3, ponas loco 4, et redeundo ad primam, de qua volebas subtrahere, fac de 0 9, et hoc facto remanent solummodo 10 de illa unitate, quam accepisti in loco tertio. Ab illo igitur denario et a 5 subtrahas 8, et remanent 7 isto modo:

397
348.

Deinde dat causam operationis, scilicet quare de 0 fiat 9 in isto casu, et patet in littera de se. Tunc sequitur illa pars: *Hoc autem facto*; et quia usque huc docuit in omni casu subtrahere primam de prima, ideo consequenter innuit, idem esse faciendum in subtractione secundae a secunda et universaliter in subtractione cuiuslibet inferioris a figura sibi supraposita, nec in aliquo variabitur modus operandi. *Sciendum tamen* etc[a]. Hic removet dubium incidens circa praemissa, et posset ista pars fuisse divisa contra principium capituli praecedentis, et incidit illud dubium sic. Quia dictum est in utraque istarum specierum, scilicet in additione et subtractione, quod incipere debemus a prima figura versus dextram, ideo forte dubitaret aliquis, utrum possibili esset operari a sinistra. Hic igitur auctor removet dubium dicens, *quod tum in additione, quam in subtractione possumus operari incipientes a sinistra; sed commodosius*, id est facilius, *fiet, sicut dictum est. Si autem probare:* Posset autem haec pars divisa fuisse contra utraque capitula iam lecta immediate, in qua docet auctor verificare et examinare, utrum bene operatum sit. Et primo docet examinare sive probare, utrum bene subtraxeris, quantum ad capitulum iam immediate lectum, et secundo docet examinare, utrum bene

addideris, quantum ad capitulum ante istud. Et incipit secunda pars ibi: *Similiter in additione*, et patent partes. Sed alium modum examinandi additionem habes supra. Hic etiam alium modum dabo examinandi, si bene subtraxisti nec ne, sed primo ponam exemplum, in quo tanguntur omnes casus incidentes in hac specie, quae est subtractio. Sit numerus iste, a quo debet fieri subtractio, 10222, numerus vero subtrahendus ille 5432, quos secundum praedicta in hoc capitulo sic locabis:

10222

5432.

Subtrahas igitur primam a prima, scilicet 2 de 2, et nichil remanet; loco ergo superioris deletae ponatur 0. Deinde subtrahas secundam de secunda, scilicet 3 de 2, et quia non potes, accipe 1 de 2 in proximo loco, et remanet 1, quod in tertio loco ponas loco 2. Subtrahe igitur 3 de 12, quae habes aggregata ex 2, a quo debebas subtrahere, et ab eo, quod mutuatum est, et tunc remanet 9, quae ponas loco secundo, scilicet loco 2. Quo facto subtrahas tertiam de tertia, scilicet 4 de 1; sed quia non potes, ergo, cum in loco proximo est 0, accipe 1 de figura proxima post 0, et quia illa est 1, deleas illam. Sed non oportet loco eius ponere 0, quia nulla figura sequitur. Quia igitur unitas valuit centum respectu figurae, a qua debuisti subtrahere, ideo de illis centum relinquas 90, faciendo 9 de 0, quae erit in via, et sic non remanet nisi denarius. Ab hoc igitur denario adiuncta unitati, a qua debuisti subtrahere, subtrahas 4, et remanent 7, quae ponas loco 1. Deinde subtrahas quartam de quarta, scilicet 5 de 9, et remanent 4, quae ponas loco 9 deleti, et remanebunt haec figurae 4790. Si igitur probare velis, utrum bene subtraxisti, addas figuras, quas subtraxisti, ad figuras hic residuas, et redibunt eaedem figurae, quae primo ponebantur. Vel sic hoc probes, quia, si proba numeri residui et proba numeri, quem subtraxisti, fuerint aequales probae numeri, a quo subtraxisti, bene fecisti. Est autem proba, sicut dictum est, ⟨residuum⟩ abiecto quotiens potest novenario, et erit proba utrobique 7.

SPECIES QUARTA, SCILICET MEDIATIO.

Mediatio est etc^a. In parte ista exequitur de quarta specie, quae est mediatio, et facit tria, qnia primo diffinit mediationem, et secundo, quid requiritur tamquam obiectum operationis in hac specie, manifestat, et tertio exequitur de modo operandi. Et incipit secunda pars ibi: *In mediatione autem*; tertia ibi: *Si velis igitur.* Diffinitio patet; utilitatem huius speciei autem subdit ibi: *ut videatur.* Est igitur haec species ad inveniendam medietatem cuiuslibet numeri propositi utilis. *In mediatione:* haec pars etiam patet in litteris. Deinde cum dicit: *Si velis igitur*, hic exequitur de numero, quod hic est operandum, et facit duo. Primo propositis figuris docet, ubi est incipiendum operari, et secundo exequitur de intento, cum dicit: *Illa igitur.* Pars prima patet; secunda incipit ibi, cum dicit: *Illa igitur.* Hic exequitur de modo operandi, et facit duo. Primo enim docet mediare primam figuram, si illa fuerit significativa (quia non contingit mediare nichil, et propter hoc oportet, quod figura medianda aliquid significet), et secundo alias ibi: *Hoc autem facto.* Iuxta primam partem notandum est, quod omnis figura aut est significativa aut non significativa. Si sit non significativa, non contingit eam mediare, sicut dictum est; si sit significativa, aut est unitas, aut alia ab unitate; si alia ab unitate, aut significat numerum parem aut imparem; in omnibus autem mediare contingit aliis a 0, et ideo de 0 non facit mentionem. Circa significativas autem sic procedit, quod primo docet mediare figuram primam, cum fuerit unitas, et secundo cum fuerit alia ab unitate, cum dicit: *Si autem prima figura.* Pars prima patet in littera, sed ibi: *Vel resolvatur*, more astronomorum, qui divisione semper (sic) dividunt integrum, *in 60 minuta*, illud totum dicit propter nichil aliud, nisi quod medietas illius 1 primae exterius reservetur, quia, sicut dicit, cum duplare volueris, quod post mediationem remanserit, medietas 1 primae exterius reservata et duplata et integra facta in locum suum,

scilicet primum, recipietur, sicut in fine capituli sequentis videbis in exemplo. Tunc sequitur illa pars, in qua docet mediare primam figuram, cum fuerit alia ab unitate, et facit duo, quia primo praemittit quandam divisionem, et patet; et secundo membra divisionis prosequitur, cum dicit: *Si par*; et primo membrum primum, et secundo secundum, cum dicit: *Si impar*. Ubi dicit, quod, si prima figura significet numerum imparem, puta 7, sume proximum parem contentum sub illo impari, scilicet 6, et medietatem eius, scilicet 3, pone loco eius; et quia mediasti 6, non 7, remanet adhuc 1 medianda, et ideo dicit: *de unitate autem, quae remanet, fac ut prius*, scilicet quando prima figura erat unitas. *Hoc autem facto:* docet mediare figuras alias a prima, et facit duo. Primo docet mediare secundam, et secundo innuit eundem modum habendum esse in mediando quascumque alias. Et incipit secunda pars in fine capituli, cum dicit: *Et sic operandum est.* Circa primam partem notandum est, quod secunda aut est 0, aut alia. Si alia, aut est par aut impar. Hanc autem divisionem innuit auctor comprehendens 1 sub numero impari. Facit igitur auctor duo, quia primo docet, qualiter operandum sit, si secunda fuerit 0, et patet; et secundo docet, qualiter sit faciendum, si sit figura significativa, cum dicit: *Si sit significativa*, et facit duo. Primo enim docet, quid faciendum sit, cum secunda fuerit par, et patet; et secundo, si impar. Ibi: *Si impar:* adhuc in duo, quia primo docet mediare secundam, quando ante eam in loco primo fuerit figura significativa, et secundo docet mediare secundam, quando ante eam fuerit in loco primo 0. Secunda ibi: *Si autem cyfra.* Ad intellectum partis primae sit numerus mediandus ille 874. Mediabis secundam sic: accipe numerum parem proximum sub 7, et erit 6, cuius, scilicet 6, medietatem, scilicet 3, ponas loco 7; et quia quaelibet unitas in secundo loco valet 10, 1, quae remanet, valet 10. Pro medietate igitur eius addas 5 ad figuram primam, scilicet ad 4, sic 839. Deinde cum dicit: *Si autem cyfra*, docet, qualiter medianda est secunda,

cum ante eam et loco primo fuerit 0. Quia pro medietate 1, quae remanet, ponendus est quinarius, scilicet 5, loco 0 in primo loco. Ex iam dictis constat etiam, quid faciendum sit, si 1 fuerit in secundo loco, quia ea deleta loco eius scribatur cyfra, et 5 addatur figurae primae eo modo, quo dictum est. Deinde cum dicit: *Et sic operandum*, in parte ista innuit idem esse faciendum in omnibus aliis figuris, sicut modo factum est circa secundam, et patet. In hac specie utaris hoc exemplo ad omnes casus. Sit iste numerus mediandus 510321. Incipe igitur a prima, et quia illa est unitas, illa deleta loco eius scribatur 0, et signum dimidii, tale scilicet ∂, ponatur extra in tabula; et tunc erunt illae figurae 510320 ∂. Deinde media secundam; quae igitur quia par est, loco eius deletae ponatur 1 sic: 510310 ∂. Deinde media tertiam, quae est impar, scilicet 3. Medietatem igitur ⟨de 2⟩, scilicet 1, loco eius ponas, et 5 addas ad figuram praecedentem sic: 510160 ∂. Deinde vadas ad quartam. Quia igitur haec est 0, praetermittatur intacta. Quo facto media penultimam, et quia haec est unitas, loco eius ponas 0, et 5 ponas ante loco 0 praecedentis isto modo 505160 ∂. Deinde media ultimam, quae quia est impar, scilicet 5, loco eius ponas medietatem de 4, scilicet 2, et pro unitate, scilicet 1, quae remanet, addas ad figuram ante, scilicet ubi est 0, 5; et erit residuum totius istud: 255160 et unum dimidium. Quod si probare velis, utrum bene mediasti, sumas probam residui, et est 1 cum dimidio. Quod si duplaveris habebis tria, quae erat proba numeri primi positi. Sed nota, quod, si aliqua proba numeri residui duplata excedat 9, abiectis 9 residuum erit proba numeri totalis primo propositi. Attamen non semper erit proba residui medietas probae totalis, licet residuum sit medietas totalis, ut in hoc numero 12345. Proba enim numeri totalis est 6, proba autem residui facta mediatione est 7 cum dimidio; quo duplato erunt 15, quorum proba est 6.

SPECIES QUINTA, SCILICET DUPLATIO.

Duplatio est numeri propositi etc[a]. Postquam auctor expedivit se de quatuor speciebus huius artis, in ista parte determinat de duplatione, quae est quinta species huius artis, et facit tria. Primo enim diffinit, quid sit duplatio; secundo subiungit ea, quae in hac specie sunt necessaria; et tertio tradit modum operandi. Et incipit secunda pars statim post, cum dicit: *In duplatione* etc[a]; et tertia ibi: *Si velis igitur.* Prima pars patet, nisi quod dicit: *ad se ipsum*, propter differentiam huius speciei ad additionem, ubi indifferenter quilibet cuilibet aggregatur. Omnis enim duplatio additio quaedam est; et non convertitur. Si igitur aliquis aliquam summam, puta 999 libras, habet, et eandem accepturus est a debitore, ad sciendum summam totius valet haec species. Deinde cum dicit: *In duplatione* etc[a], subdit, quae ad hanc speciem sunt necessaria, et facit duo. Primo enim dicit, quod *unus ordo figurarum est hic necessarius*, et patet; secundo docet, ubi incipiendum est operari, ibi, cum dicit: *Et inchoandum est.* Et haec in duo: primo enim docet, ubi in hac specie et universaliter in omnibus sequentibus sit incipiendum operari; et secundo assignat causam specialiter, quare in hac specie incipiendum est a sinistra, id est ab ultima figura, et incipit secunda pars ibi, cum dicit: *Et ratio huius est.* Adhuc primo facit ⟨duo, quia primo facit,⟩ quod dictum est, et secundo ad faciliorem dictorum retentionem subdit quosdam versus ibi: *Subtrahis aut addis a dextris aut mediabis* etc[a], et patet prima pars. ⟨Sequitur⟩: *Subtrahis* etc[a]. Si addideris vel subtraxeris numerum numero vel numerum a numero, sive mediaveris numerum propositum, hoc facies incipiendo a dextris; *Sed dupla divide multiplica a laeva*, id est a sinistra scilicet incipiendo; *Extrahe radicem duplam*, id est in numeris tam quadratis quam cubicis, *a parte sinistra* scilicet incipiendo. Tunc sequitur alia pars ibi: *Et ratio huius est*, in qua assignat causam specialiter, quare a sinistra est in ista

specie incipiendum; et facit duo. Primo enim facit, quod dictum est, et secundo innuit possibilitatem operandi incipiendo a figura prima versus dextram; et incipit secunda pars ibi: *Et licet aliquomodo.* Exemplum primae partis non potest hic dari, antequam dicitur modus operandi; in fine igitur ostendendum est, quomodo incipiendo a prima figura contingit aliquando idem bis duplare, et similiter quomodo possibile sit incipere a prima figura praeter hoc, quod idem dupletur bis. Deinde cum dicit: *Si velis igitur*, in parte ista tradit modum operandi, et facit duo. Primo enim facit hoc, et secundo dat modum examinandi operationem, si recte factum est, cum adicit in fine: *Probatio autem huius est.* Adhuc prima pars dividitur, quia primo docet duplare ultimam, secundo penultimam, tertio innuit, hoc idem esse faciendum in omnibus aliis. Secunda pars incipit ibi: *Hoc facto*; tertia ibi: *Eodem modo operandum est.* Prima pars patet, quia, quid ex duplatione ultimae provenit, per omnia faciendum est sicut in additione. Deinde cum dicit: *Hoc facto*, docet duplare penultimam, et facit duo. Primo enim innuit, quod eodem modo faciendum est cum penultima, sicut fit cum ultima, et hoc, cum penultima fuerit significativa; et secundo subiungit, quid faciendum est, cum illa penultima fuerit 0, cum dicit: *Si vero fuerit cyfra*; partes patent. Tunc cum dicit: *Eodem modo*, innuit, idem esse faciendum in omnibus aliis, sicut modo factum est cum ultima et penultima. Deinde cum dicit: *Probatio autem huius*, dat modum examinandi operationem suam in hoc capitulo et in praecedenti proximo, et patet. Esto igitur, quod numerus duplandus sit iste: 255160 et unum δ. Incipe igitur a sinistra, id est ab ultima figurarum, scilicet a 2; quibus duplatis proveniunt 4, quae ponas loco 2 sic: 455160 δ. Deinde dupla penultimam, scilicet 5, et proveniunt 10. Pone igitur 0 loco 5, et 1 addas ad 4 sic: 505160 δ. Deinde duples antepenultimam, scilicet 5, et proveniunt iterum 10. Pone igitur 0 loco 5, et articulum transferas ponendo 1 loco 0 sic: 510160 δ. Deinde dupla 1, et proveniunt 2, quae ponas loco 1.

Deinde dupla 6, et provenient 12; 2 igitur ponas loco 6, et 1 addas ad 2, et erunt 3, et erit iste numerus sequens 510320 ϑ. Deinde dupla, quod babuisti ultra integra, ϑ, et duplum eius, scilicet unum integrum, ponas locó 0 in primo loco, et stabunt figurae sic: 510321. Iste est numerus, quem in praecedenti capitulo mediasti. Quod si probare velis, an bene feceris, absque eo, quod tu probes unam speciem per aliam, videas, si proba numeri iam duplati, id est, qui provenit post duplationem factam, fuerit dupla ad probam numeri duplandi, quem scilicet primo posuisti. Si sic, tunc bene factum est; et patet in proposito, quod proba numeri, qui provenit post peractam duplationem, 3 est, proba autem duplandi, scilicet numeri primo propositi, est 1 cum ϑ, etcª.

SEQUITUR SEXTA SPECIES, SCILICET MULTIPLICATIO.

Multiplicatio est numeri etcª. In parte ista determinat auctor de sexta specie huius artis, scilicet de multiplicatione. Universaliter potuit dici, quod hic determinat de multiplicatione et divisione simul. Et primo facit hoc, et secundo dat modum examinandi operationem in utraque specie, et hoc facit in fine capituli sequentis, cum dicit: *Cum itaque.* Adhuc primo determinat de multiplicatione, secundo de divisione, cum dicit in proximo capitulo: *Divisio est* etcª. In hoc capitulo primo auctor facit quinque. Primo enim diffinit multiplicationem; secundo manifestat, quot ordines figurarum sunt hic necessarii; et tertio dat sex regulas hanc speciem rectificantes; quarto docet operari; et quinto subdit quoddam notabile vel cautelam hic observandam. Et incipit secunda pars ibi: *In multiplicatione* etcª; tertia ibi: *Sunt autem sex*; quarta ibi: *Si velis igitur*; quinta ibi: *Sciendum autem*, in fine capituli. Dicit ergo primo, quod *multiplicatio est propositis duobus numeris inventio tertii numeri, qui* etcª. Vult dicere, quod, si proponantur duo numeri, quorum unum velis multiplicare per alterum, tunc multiplicatio est inventio cuiusdam numerii tertii, qui numerus tertius totiens et

tot vicibus continet alterum illorum propositorum, quot unitates sunt in reliquo. Verbi gratia: si velis multiplicare 5 per 4, proveniunt 20, qui, scilicet numerus vigenarius, tertius est a duobus propositis, et iste totiens continet 5, quot unitates sunt in 4, et etiam totiens continet 4, quot unitates sunt in 5. Quater enim quinque continet 20, vel quinquies quater, quod idem est. Multiplicare igitur numerum per alium est invenire quendam numerum tertium, qui totiens continet alterum illorum, quot unitates sunt in reliquo. Est autem ⟨haec⟩ species maxime utilis; quia esto, quod rex aliquis deputat aliquomodo cuilibet militum, puta 666, quos mittat in expeditionem, magnam summam pecuniae, puta 999 librarum. Ad sciendum igitur, quantam summam in universo militibus deputavit, valet haec species hic tradita. Tunc sequitur illa pars: *In multiplicatione* etc[a], in qua manifestat, quot ordines figurarum in hac specie sunt necessarii, et facit duo. Primo enim facit, quod dictum est, et secundo per modum notabilis dat quandam cautelam hic observandam, et incipit pars secunda ibi: *Notandum etiam* etc[a]. Circa primum duo facit, quia primo manifestat, quod duo numeri in hac specie sunt necessarii, et secundo addit tertium quendam numerum, qui provenit ex duobus propositis, cum dicit: *Potest etiam tertius numerus.* Adhuc circa primam partem facit duo, quia primo facit quod modo dictum est, et secundo subiungit modum, quo numeros istos denominabimus, ibi: *Numerus multiplicans.* Circa primam partem est sciendum, quod numerus multiplicandus est ille, qui debet multiplicari; numerus multiplicans est, per quem alius est multiplicandus. Deinde cum dicit: *Numerus multiplicans,* subiungit modum, quo numeros istos denominabimus, et patet. Verbi gratia: si velimus multiplicare 6 per 4, dicemus multiplicando sic: quater sex. Et cum dicit: *potest etiam* etc[a], addit quendam numerum tertium, qui resultat ex duobus, quorum unus est multiplicans et alter multiplicandus, et patet. Deinde cum dicit: *Notandum etiam,* per modum notabilis dat quandam cautelam hic observandam,

et est, quod, cum numerus aliquis debet per alium multiplicari, quocumque illorum velit, poterit quis uti pro multiplicando, et similiter quocumque pro multiplicante, quia provenit idem ducendo 6 in 5, et 5 in 6. Deinde cum dicit: *sunt autem sex regulae,* assignat sex regulas hanc speciem rectificantes, et iuxta hoc ista pars habet dividi in sex partes, ita quod primo dat regulam ducendi digitum in digitum; secundo digitum in articulum; tertio digitum in numerum compositum; quarto articulum in articulum; quinto articulum in numerum compositum; sexto numerum compositum in numerum compositum. Nec pluribus modis est possibile numerum duci in numerum, sive numerum multiplicare per numerum, et patent partes. Sed quia semper qualibet figura utimur, ac si per se poneretur, ideo sola prima regula est de esse huius speciei. Sed aliae sunt quasi corrolaria quaedam ex prima regula sequentia, sicut videbitur. Quapropter quinque regulas ultimas reservabo ad finem capituli. Quia igitur tota vis capituli iacet in prima regula, ideo diligenter est notanda. Dicit igitur sic: *Quando digitus multiplicat digitum, subtrahendus est* etc[a], id est, si velit aliquis multiplicare unum digitum per alium, quorum unus est maior alio, tunc videndum est, per quot unitates maior digitus distet a decem inclusive; totiens debet minor subtrahi ab illo articulo, qui ab ipso minore digito denominatur. Verbi gratia: si velis multiplicare 8 per 4, vide, per quot unitates 8 a decem distet inclusive, et constat, quod per duas unitates; ergo totiens, id est bis, subtrahas 4 de 40. Cum igitur bis quater sunt 8, si 8 subtrahas de eo, remanent 32, quod est intentum, quia quater octo sunt 32. Exponas litteram sic: *Quando digitus multiplicat digitum,* id est, quando digitum oportet multiplicare digitum, altero semper maiore existente et altero minore, *subtrahendus est minor digitus ab articulo suae denominationis,* id est ab articulo, qui denominatur ab illo digito, *per differentiam maioris digiti ad denarium,* id est totiens vel tot vicibus, quot per unitates maior digitus distat a denario, *denario simul computato,*

id est vel inclusive, vel etiam annumerando denarium. Et subdit idem exemplum, quod iam induxi. Notandum, quod hic auctor non facit mentionem de multiplicatione digiti eiusdem in eundem, sed solum loquitur de talibus, quorum unus est maior et alter minor. Esto igitur, quod tu velis multiplicare eundem per se vel (ducere) in se, quod idem est, verbi gratia 8 per 8, tunc, quia idem est iudicium de utraque, per quot unitates 8 distant a decem inclusive, totiens subtrahas octo de 80, et patet, quid ulterius faciendum est, per ea, quae prius dicta sunt. Item nota virtutem illius, quod dicit: *per differentiam maioris ad denarium*. Differentia duorum numerorum est id, in quo maior excedit minorem. Verbi gratia, quia denarius excedit 8 in duobus, ideo dicimus, duo tunc esse differentiam 8 ad denarium; et ideo credo vere, quod non oportebit addere: *denario simul computato*; ymmo credo, quod hoc sit gloza inserta textui ex parvo intellectu illius: *differentia minoris numeri ad maiorem.* Ideo nota, quod, licet haec regula sit generalis ad omnes numeros et digitos, in primis tamen digitis non est per eam laborandum, quia, si debeas multiplicare tria per tria, vel tria per quatuor, quilibet rudis statim sciet, quantum provenit. Et tunc obmissis quinque regulis sequentibus vadas ad locum illum: *Si velis igitur,* in quo dat auctor modum operandi et facit duo. Primo enim docet ordinem figurarum, sive ordinare figuras numerorum, quorum unum oportet in alterum ducere, et secundo exequitur, cum dicit: *quo facto* etc[a]. Prima pars patet secundum litteram, sed exemplum accipiatur sic. Esto, quod numerum istum, scilicet 987, velis multiplicare per istum 654, tunc hoc ordine stabunt figurae:

987
654

Deinde cum dicit: *Quo facto,* exequitur; et quia figurae numeri multiplicantis debent duci in quamlibet figuram numeri multiplicandi, ideo docet primo ducere omnes figuras numeri multiplicantis in ultimam numeri multiplicandi, et secundo docet

ducere omnes easdem figuras numeri multiplicantis in penultimam multiplicandi et in convenienter se habentes, cum dicit: *Hoc autem facto.* Tertio subdit quasdam cautelas hic observandas in operando ibi: *Si autem contingat.* Adhuc circa primam partem duo facit, quia primo docet ducere ultimam figuram numeri multiplicantis in ultimam figuram numeri multiplicandi, et secundo alias convenienter se habentes numeri multiplicantis in eandem ultimam multiplicandi. Secundam ibi: *Hoc facto.* Adhuc primo facit duo; primo enim ponit casus provenientes ex ductu ultimae in ultimam, et secundo iuxta quemlibet casum docet operari, cum dicit: *Si digitus* etc[a]. Prima pars patet. Deinde cum dicit: *Si digitus,* docet, quid in unoquoque casu sit agendum, et haec pars habet tres partes iuxta numerum trium casuum. Secundam ponit ibi: *Si articulus*; tertiam ibi: *Si numerus compositus,* et patebunt partes, cum dedero exemplum de modo operandi. Deinde cum dicit: *Hoc facto,* docet ducere omnes alias a prima figura numeri multiplicantis in eandem ⟨ultimam⟩ numeri multiplicandi, et facit duo. Primo enim dicit eundem modum esse in ducendo omnes ab ultima numeri multiplicantis in eandem ultimam multiplicandi usque ad primam numeri multiplicantis, et secundo docet, quomodo ducenda sit prima numeri multiplicantis in eandem ultimam numeri multiplicandi. Secunda pars est ibi: *Quae ducenda est.* Prima pars patebit in exemplo. In secunda facit duo, quia primo ponit casus provenientes ex ductu primae figurae numeri multiplicantis in ultimam multiplicandi, et patet; et secundo iuxta casus istos docet operari, cum dicit: *Si digitus,* et patebit exemplificando. Deinde cum dicit: *Hoc autem facto,* postquam docuit ducere omnes figuras numeri multiplicantis in ultimam numeri multiplicandi, docet convenienter ducere omnes easdem ⟨figuras⟩ numeri multiplicantis in penultimam numeri multiplicandi, et secundo docet ducere omnes easdem figuras numeri multiplicantis in omnes alias ab ultima et penultima numeri multiplicandi. Secunda ibi: *Deinde ut prius.* Adhuc prima pars potest dividi in partes

duas, quia primo docet ducere ultimam numeri multiplicantis (in penultimam numeri multiplicandi), et secundo alias in penultimam multiplicandi. Secunda ibi: *Similiter quaelibet figura.* Adhuc circa primum duo facit; primo praemittit casus provenientes ex ductione ultimae multiplicantis in penultimam multiplicandi, et secundo exequitur modum operandi iuxta quemlibet illorum casuum, cum dicit: *Si digitus,* et patent ambae partes. *Similiter quaelibet figura:* docet ducere omnes alias ab ultima numeri multiplicantis in eandem penultimam numeri multiplicandi, et patet in littera. *Deinde ut prius:* docet, quid agendum est in ductione omnium figurarum numeri multiplicantis in omnes figuras alias ab ultima et penultima numeri multiplicandi, et dicit, quod eodem modo faciendum est, sicut modo factum est circa ultimam et penultimam, quia non est cessandum ab anterioratione figurarum numeri multiplicantis, nec cessandum est a ductu omnium figurarum numeri multiplicantis in illam, sub qua est prima multiplicantis, donec quaelibet figura numeri multiplicantis ducatur in quamlibet figuram numeri multiplicandi. Deinde cum dicit: *Si autem contingat,* postquam docuit, qualiter est hic operandum, subdit convenienter quasdam cautelas hic observandas, et sunt quinque. Secunda ibi: *Si autem occurat*; tertia ibi: *Sed si sit spatium*; quarta ibi: *Si autem cyfra*; quinta ibi: *Ex praedictis etiam patet.* Et omnes istae cautelae videbuntur in exemplo. Deinde cum dicit: *Sciendum est autem,* ponit quoddam notabile, quod spectat ad bene esse huius artis, quantum ad hanc speciem et divisionem et radicum extractionem, et patebit in exemplo. Utaris igitur hoc exemplo in operando iuxta quemlibet casuum incidentium in hac specie. Sit numerus, quem velis multiplicare, ille 45060, et numerus multiplicans, scilicet ille, per quem velis illum alium multiplicare, sit ille 2030. Ordinabis igitur figuras, et stant isto modo:

45060
2030

Ducas ultimam in ultimam, scilicet 2 in 4 sic dicendo: bis quater, et resultat digitus, quem ponas super caput ipsius 2 in ordine numeri multiplicandi sicut hic:

8 45060
2030

Quo facto, quia non vales ducere penultimam in ultimam, cum ipsa penultima sit 0, ideo supra caput eius pone 0 iuxta tertiam cautelam isto modo:

80 45060
2030

Deinde ducas 3 in 4, et resultat numerus compositus, scilicet iste 12. Ponas igitur 2 supra 3, et articulum loco 0 versus sinistram sic:

81245060
2030

Deinde ducas primam numeri multiplicantis in ultimam numeri multiplicandi, et quia illa prima est 0, deleas superiorum, scilicet 4 et ponas igitur 0 iuxta primam cautelam, et stabunt figurae ordinatae sic:

81205060
2030

Quo facto anteriorandae sunt figurae numeri multiplicantis per locum unum, et figurae stabunt post anteriorationem sic:

81205060
2030

Quo facto ducas iterum figuras omnes numeri multiplicantis in illam figuram, sub qua est prima numeri multiplicantis, scilicet in 5, et quidquid excreverit addas ad figuras suprapositas. Duc ergo ultimam numeri multiplicantis in illam, sub qua est prima multiplicantis, scilicet 2 in 5, et provenit articulus, scilicet 10; et quia significativa est supra 2, non oportet ⟨pro ea⟩ ponere 0, cum 0 non ponatur alicubi, nisi ut locus ⟨vacuus⟩ occupetur: sed illum articulum addas ad 8 versus sinistram. Quo facto, quia proxima figura multiplicantis est 0, praetermittatur intacta, sicut dixit cautela secunda; de residuis autem, scilicet de 3 et

0, numeri multiplicantis fac ut prius, et stabunt figurae ordinatae isto modo et superius et inferius:

91350060

2030

Quo facto iterum anteriorandae sunt figurae numeri multiplicantis per unum locum; et quia figura proxima illae, sub qua est prima numeri multiplicantis, est 0, non oportet sub eam anteriorare, et ideo anteriorandae sunt figurae numeri multiplicantis per duo loca, sicut dixit cautela quarta. Facta autem anterioratione stabunt figurae sic:

91350060

2030

Deinde ducas iterum omnes figuras numeri multiplicantis in 6, sub quo est prima numeri multiplicantis, et per omnia fac ut prius, et erunt figurae sic stantes post multiplicationem illam:

91471800

2030

Hoc autem facto non oportet ulterius anteriorare, quia prima figura numeri multiplicandi est 0, sicut docuit cautela quinta et ultima. Sed inter istos duos numeros, scilicet multiplicandum et multiplicantem, posset relinqui spatium, ut dixit notabile in fine capituli positum, ut ibi ponatur illud, quod provenit ex ductu figurae in figuram. Tunc enim non errabitur de facili, et ideo hoc notabile est de bene esse huius artis.

His expeditis resumas regulas dimissas ibi: *Quando digitus.* Et est regula prima inter has quinque, quod, *si digitus multiplicat articulum, ducendus est digitus ille in digitum articuli* etc[a]. Verbi gratia: Sit digitus 9 et articulus 60. Duc ergo 9 in 6, et provenient 54, et constat, quod ratione 0 praecedentis 6 quaelibet unitas, id est 4, valet decem, et quilibet denarius, id est 5, valet centum, novies ergo 60 valent 540. *Quando digitus.* Secunda regula huiusmodi est: *Si digitus multiplicat numerum compositum, ducendus est digitus ille in utramque partem numeri compositi* etc[a]. Verbi gratia: Si multiplicare

velis 99 per 9, tunc ducas primo digitum illum, 9 scilicet, in 9, qui est articulus numeri compositi, et provenient 81, et stabunt figurae sic: $\begin{smallmatrix}819\\ 9\end{smallmatrix}$. Deinde ducas eundem digitum, scilicet 9, in digitum numeri compositi, et proveuient etiam 81; addas igitur 8, scilicet articulum illum, ad 1, qui erat digitus numeri, qui primo provenit, et 1, quae est digitus numeri provenientis, pouas loco 9; et stabunt figurae sic: $\begin{smallmatrix}891\\ 9\end{smallmatrix}$, et totum istud patet per ea, quae sunt habita in operatione. Sed nota, quod, cum auctor dicit, quod digitus iste debet duci in utramque partem numeri compositi, et producta debent coniungi, hoc sic fiet, quod ultima figura numeri, qui provenit ex ductu digiti in digitum, debet addi ad primam figuram numeri, qui provenit ex ductu digiti in digitum articuli, sicut evidens est in exemplo. Tertia regula est ista: *Quando articulus.* Verbi gratia: Sint articuli 90 et 60. Duc ergo 9 in 6 figuris ordinatis, sicut debent et dictum est supra, hoc modo:

60

90

Ex ductu igitur 9 in 6 vel e contrario, provenient 54; ergo per ea, quae supra dicta sunt, 4 debent poni supra 9, et quinarius sinistrari. Deinde debet deleri 6 et loco eius poni 0, sicut dictum est in cautela prima, et stabunt figurae sic:

5400

90 .

Constat etiam, quamlibet unitatem valere centum, et quemlibet denarium mille. Vides ergo totum istud corollarie sequi ex praedictis, quibus visis patent regulae sequentes. Utrum autem bene operatus sis, sic invenies. Multiplices probam numeri multiplicantis in probam numeri multiplicandi, tunc, si proba numeri provenientis est aequalis probae producti, bene operatus es, sin autem non, erratum est. Verbi gratia: numerus primo multiplicandus erat iste 45060, cuius proba est 6; numerus vero ⟨primo⟩ multiplicans erat iste 2030, cuius proba est 5. Duc igitur 5 in 6, et proveniunt 30, cuius proba est 3. Vide igitur,

si proba numeri, qui provenit ex ductu numeri multiplicantis primo in numerum multiplicandum primo, etiam est 3; et constat, quod sic, quia erat 91471800. Sic de illo. Unde illud valde est utile in aequationibus, cum oporteat aliquos numeros magnos in se ducere; quia, si probae concordant, non oportebit reiterationem facere, sicut est consuetum fieri, cum aliquis diffidat sibi, timens se errasse. Et si dicas, quod convenienter hoc non tenet, quia oppositio contradicentis stat, cum deficiat in causa, ut aliquis praecise, vel voluntarie, vel oblivione transeat 9, vel eum aliquo modo obmittat, scilicet vel addendum non addat, vel non addendum addat: tunc ad istud repellendum, quod etiam detur occasio posse errare, sumas probam per 9, sicut dictum est, et similiter per 8, et si in utraque concordaverint, non est possibile (te) errasse.

SEPTIMA SPECIES DE DIVISIONE.

Divisio est etc^a^. Haec est species septima huius artis, et dividitur ista pars in duas. Primo enim auctor distinguit divisionem, et secundo de ea exequitur. Secunda ibi: *Notandum igitur.* Primo enim vult dicere, quod, si proponantur duo numeri, quorum unum oportet per alium dividere, tunc divisio est distributio numeri maioris in tot partes, quot unitates sunt in minori. Verbi gratia: si velis dividere 24 per 4, tunc in tot partes oportet dividere 24, quot unitates sunt in 4. Et quia quatuor unitates sunt in 4, ideo in qualibet parte (de) 24 erunt 6, quia 6 sunt quatuor vicibus in 24. Et valet haec species, quia, si rex aliquis deputat 9876 libras parisiensium 543 militibus ituris in expeditionem, ita quod haec summa aequaliter inter eos dividatur, quantum de tanta summa (cuilibet) continget, scietur per speciem istam, quae est divisio. Deinde cum dicit: *Notandum igitur,* exequitur de divisione, et facit quatuor. Primo enim praemittit, quot numeri sunt necessarii in divisione; secundo exequitur de modo operandi; et tertio subdit finem et utilitatem huius speciei; et quarto docet examinare, si erratum

est vel non. Secunda pars incipit ibi: *His itaque*; tertia ibi: *Si autem velis scire*; quarta ibi: *Cum itaque*. Adhuc circa primum facit tria. Primo enim proponit, quot numeri hic sunt necessarii, secundo conditiones eorum subiungit, et tertio de ordine et situatione eorum determinat. Secunda ibi: *Numerus autem*; tertia ibi: *Si velis igitur*. Quantum ad primam partem, supponatur de dictis numeris, quid sit eorum officium, usque exemplificetur. Circa secundam partem sciendum est, sicut dicit auctor, quod *numerus dividendus semper debet esse maior numero divisore, vel saltem aequalis ei, si divisio debet fieri per integra*. Hoc autem, quia, si 4 debent dividi inter 8, tunc cuilibet de illis octo continget unum dimidium de illis 4. Si etiam tot sunt unitates in divisore, quot sunt in dividendo, planum est, quod cuilibet continget unum de illis tantum. Deinde cum dicit: *Si velis igitur*, determinat de ordine et situatione numerorum, scilicet dividendi et divisoris, et facit duo. Primo enim facit hoc, et secundo subdit quosdam casus situs huius impedientes, cum dicit: *Sunt enim duae causae*. Quantum ad primam partem, sit numerus, quem velis dividere 9876, et numerus divisor, sive per quem velis istud dividere, sit iste 543. Ponas igitur ultimam sub ultima, et penultimam sub penultima hoc modo

9876
543

Et dicit auctor, quod locanda est ultima sub ultima, sicut hic factum est, *si competenter fieri potest*; et quia hoc non semper est possibile, ideo consequenter subdit auctor casus, in quibus impedimentum accidit, ne hoc fieri possit, cum dicit: *Sunt enim duae causae*. Dicit autem, quod duae sunt causae, scilicet quare ultima numeri divisoris non erit sub ultima numeri dividendi. Ut verbi gratia, si velis dividere 654 per 99, tunc 9 de 6 non potest subtrahi. Alia causa est, si ultima numeri divisoris possit aliquotiens subtrahi ab ultima numeri dividendi, sed alii numeri divisoris non possunt totiens subtrahi

a sibi suprapositis. Verbi gratia: si velis dividere 654 per 69, vel etiam 6254 per 629. Hoc habito cum dicit: *His itaque,* exequitur de modo operandi, et facit duo. Primo enim praemittit quoddam praeambulum in tota hac specie observandum, et secundo iuxta illud praeambulum operatur, cum dicit: *Viso igitur.* In prima parte intendit dicere, quod dispositis figuris incipiendum est ab ultima figura numeri divisoris, et videndum est, quotiens illa subtrahi poterit a figura sibi supraposita, ut et totiens subtrahi possint reliquae figurae numeri divisoris a sibi suprapositis et a residuo, si quid fuerit residuum versus sinistram. Et subdit, quod non contingit pluries subtrahere quam novies, nec minus quam semel. Hic sciendum est, quod, quidquid est directe supra aliquam figuram, et ab eadem superiori, ⟨quae⟩ dicitur esse supra inferiorem, et a toto debet fieri subtractio; quod autem est versus sinistram, vocat auctor residuum. Ideo nota, quare non contingit pluries subtrahere quam novies, nec minus quam semel. Causa huius est, quia, quotiens fit subtractio, hoc significabit figura in numero quotiens, sicut statim dicetur; et nulla est figura, quae plus significet quam 9, et nūlla, quae minus quam unum. Deinde cum dicit: *Viso igitur quotiens,* docet iuxta hoc praeambulam operari, et est intelligendum, quod, quia, quotiens poterit ultima subtrahi de ultima, totiens etiam quaelibet alia de sibi supraposita, ponenda est quaedam figura supra numerum dividendum signans, quotiens inferiores de superioribus subtrahi possint; ideo figura ista et omnes illius tertii ordinis quotiens vocantur. Duo igitur auctor facit. Primo enim docet invenire quotiens primum et iuxta ipsum operari, et secundo alia et iuxta ea operari, cum dicit: *Hoc autem facto.* Dicit primo: *cum tu videris, quotiens figurae inferioris ordinis possint subtrahi a superioribus, scribatur numerus* seu figura *denotans,* quotiens illa subtractio est possibilis, *quotiens* scribatur, inquam, *directe supra illam figuram, sub qua est prima figura numeri divisoris* seu ordinis inferioris; *et per illam figuram subtrahendae sunt omnes figurae*

inferioris ordinis a suis superioribus. Verbi gratia: esto, quod numerus dividendus sit ille ut supra 9876, et numerus, per quem velis eum dividere, sit iste ut supra 543; situentur ergo isto modo:

9876
543

Videas igitur, quotiens poteris quinque de novem subtrahere, ut aliae totiens etiam possint a suis superioribus subtrahi; et constat, quod semel. In signum igitur huius, quia semel hoc poteris, ponas 1 super 7, quia sub ea est prima figura divisoris, et stabunt figurae isto modo:

1
9876
543

Quo facto per unitatem illam subtrahas omnes figuras inferioris ordinis a superioribus, ducendo eam in quamlibet inferioris ordinis per modum multiplicationis sic dicendo: semel quinque sunt 5, quae tollas de novem, et remanent 4. Iterum ⟨ad⟩ aliam figuram inferioris ordinis sic: semel 4 sunt 4, quae tollas de 8, et remanent 4; iterum ad ultimam sic: semel 3 sunt 3, quae demas de 7, et remanent 4. Hoc facto stabunt figurae post talem subtractionem isto modo:

1
4446
543

Deinde addit: *Hoc autem facto.* Docet invenire quotiens alia a primo, et facit duo. Primo enim innuit, idem esse faciendum omnino post anteriorationem figurarum ac primo, et secundo docet, quamdiu sit utendum quotiens, et cum hoc, quamdiu sit anteriorandum, ibi, cum dicit: *Nec cessandum.* Adhuc primo facit ⟨duo, quia primo facit⟩, quod dictum est, et secundo dat quandam cautelam hic observandam ibi: *Si autem contingat.* Dicit primo, quod *hoc facto,* id est invento quotiens primo et facta per ipsum subtractione omnium figurarum inferiorum de

superioribus, *anteriorandae sunt figurae numeri divisoris per unam differentiam, et negotiandum est ut prius.* Verbi gratia: invento primo quotiens et facto subtractione omnium figurarum inferiorum a superioribus stabunt figurae sic:

1
4446
543

Anteriores igitur inferiores, et stabunt post anteriorationem hoc modo:

1
4446
 543

Vide igitur, quotiens 5 possit subtrahi de 44, et invenies, quod octies. Ponatur igitur 8 supra 6, quia sub illa est prima divisoris, et stabunt figurae postea sic:

18
4446
543

Deinde per illa 8 subtrahas omnes inferiores de superioribus sic: octies quinque sunt 40, quae tollas de 44, et remanent 4. Item octies quatuor sunt 32, quae tollas de 44, et remanent 12; item octies tria sunt 24, quae tollas de 126 hoc modo, et stabunt figurae sic:

18
102
543

Sequitur illa pars: *Si autem contingat,* in qua dat quandam cautelam hic observandam; et est talis, quod, *facta anterioratione si aliquando ultima figura* vel alia *non possit subtrahi aliquotiens a superioribus, tunc supra illam, sub qua est prima divisoris, ponenda est 0 in ordine* ⟨*numeri*⟩ *denotantis quotiens, et tunc anteriorandae sunt figurae ut prius*; et hoc est verum, si nondum perventum sit ad primum numerum dividendi; illud igitur ⟨eo usque⟩ semper faciendum est. Verbi gratia: esto,

quod velis dividere istum numerum 78876 per 38. Situentur igitur hoc modo:

78876
38

Et quia bis poteris subtrahere tria de 7, et bis 8 de sibi supraposita, ideo numerum quotiens, scilicet 2, ponas supra 8, sub quo est prima numeri divisoris, et stabunt figurae sic:

2
78876
38

Postea igitur subtrahas inferiores a superioribus, sicut dictum est, et facta subtractione stabunt figurae sic:

2
2876
38

Quo facto anteriorentur figurae inferiores per unam differentiam, et stabunt sic:

2
2876
38

Quia igitur nullotiens poteris tria de duobus subtrahere, in signum igitur huius scilicet 0 ponas supra 8 superioris ordinis, sub quo stat prima inferioris, et anteriora figuras per unam differentiam, et tunc stabunt figurae sic post anteriorationem:

20
2876
38

Deinde videas, quotiens poteris inferiores subtrahere de sibi suprapositis, et invenies, quod septies. Ponas igitur 7 supra 7, sub quo est prima divisoris, et stabunt figurae sic:

207
2876
38

Post hoc igitur septies subtrahas omnes inferiores a (sibi supra-

positis) superioris ordinis ut prius, et cum omnes subtractae sunt, stabunt figurae sic:

207
216
38

Quo facto anteriorandae sunt figurae numeri divisoris, et stabunt figurae sic:

207
216
38

Deinde videas, quotiens poteris subtrahere figuras inferiores a sibi suprapositis, et invenies, quod quinquies. Ponas igitur 5 supra 6, sub quo est prima inferioris ordinis, et stabunt figurae sic:

2075
216
38

Deinde per illa quinque subtrahas figuras numeri divisoris ut prius, et facta subtractione remanebunt 26 de numero primo proposito, quod est minus divisore. Tunc sequitur illa pars: *Nec cessandum est,* in qua docet, quamdiu anteriorandum sit, et invenienda sit figura quotiens; et dicit, quod a tali anterioratione figurarum numeri divisoris non est cessandum, nec est cessandum ponere quotiens numerum supra numerum dividendum, nec cessandum est ducere numerum quotiens in divisorem et productum a dividendo subtrahere, ymmo omnia ista facienda sunt, donec prima figura cum omnibus aliis numeri divisoris fuerint subtractae a prima figura numeri dividendi. Quo facto aut aliquid erit residuum, aut nichil. Si aliquid, sicut in exemplo secundo patet, reservetur exterius in tabula, et erit semper minus divisore, si bene fuerit operatum. Deinde cum dicit: *Si autem velis scire,* assignat finem et utilitatem huius speciei dicens: Si velis scire, quantum de toto numero proposito eveniat cuilibet de numero divisore, numerus quotiens hoc ostendet. Verbi gratia:

de numero primo proposito, scilicet 9876, evenerunt 18 cuilibet de 543, et remanserunt 102, quae inter 534 non possunt dividi, nisi frangantur. Ut si essent tot librae, frangerentur in solidos multiplicando 102 per 20, quae sunt numerus solidorum in una libra, et tunc post multiplicationem exient 2040, quae iterum dividendo per eundem numerum divisorem 543 haberes 3 solidos, et remanerent tunc adhuc 411 solidi. Quos si adhuc inter eosdem velis dividere resolvas eos in ⟨denarios ducendo 411 in⟩ 12, quia tot sunt denarii in quolibet solido, et erunt 4932 denarii; quos sicut prius per 543 dividas, et exibunt 9 denarii, ⟨et remanebunt 55 denarii⟩, de quibus ⟨quilibet⟩ de divisore non habebit dimidiam pictam. Sic igitur de tota summa proposita quilibet de numero divisore habebit 18 libras et 3 solidos cum 9 denariis. Tunc sequitur illa pars: *Cum itaque facta,* quae dat modum examinandi operationem in his duabus speciebus, et primo in divisione, et secundo in multiplicatione, cum dicit: *et e contrario.* Et quia utraque pars plana est in littera, ponantur exempla, et primo de divisione. Quia facta divisioue de 9876 per 543 exibunt in numero quotiens 18 remanentibus 102, multiplicentur 18 per 543, et exibunt 9774, quibus si addideris 102, quae prius remanserunt redibunt primae figurae, scilicet 9876. Exemplum de multiplicatione sit illud. Numerus multiplicaudus erat ille 45060, numerus multiplicans ille 2030, ex quorum unius ductu in alterum proveniunt 91871800. Dividas igitur hunc ⟨numerum⟩ per numerum multiplicantem, scilicet per 2030, et exibunt in numero quotiens 45060, quae figurae prius erant in numero multiplicando. Operatio autem in divisione etiam sine multiplicatione divisoris per quotiens probari poterit, sicut e contrario etiam factum est in fine capituli de multiplicatione. Quia sumatur proba numeri dividendi, ⟨numeri⟩ divisoris et numeri quotiens. Adhuc probam ⟨numeri⟩ divisoris in probam numeri quotiens multiplica, et provenientis sume probam; quae si aequalis fuerit probae numeri dividendi, bene actum est. Verbi gratia: numerus primo pro-

positus dividendus sit iste 56088, cuius proba est 0. Sit divisor iste 123, cuius proba est 6. Facta igitur divisione erit numerus quotiens iste 456, cuius proba est etiam 6. Duc ergo probam divisoris in probam numeri quotiens, et proveniunt 36, quorum proba est 0, sicut est proba numeri dividendi. Verumptamen facta divisione residuum si quid fuerit, aliud quid est faciendum; quia videas probam illius residui, et eam tollas de proba totius numeri propositi primo ⟨dividendi⟩, si poteris; si non, tunc probae numeri totalis addas 9, et postea subtrahas probam residui, et tunc duc probam numeri divisoris in probam numeri quotiens, et provenientis probam serva, quae si fuerit aequalis probae numeri primae, bene fecisti. Verbi gratia: numerus propositus primo dividendus erat iste 9876, cuius proba est 3, numerus autem divisor erat iste ⟨543, cuius proba est 3, et numerus quotiens erat iste⟩ 18, cuius proba est 0. Facta autem divisione remanserunt 102, cuius proba est etiam 3. Subtrahas igitur probam numeri residui de proba numeri primo propositi dividendi, et remanet 0. Duc autem probam numeri divisoris in probam numeri quotiens, et provenit 0, quare bene operatus est.

OCTAVA SPECIES, QUAE EST PROGRESSIO.

Progressio est numerorum etc^a^. Haec est octava species, quae est insufficiens, quia se ad omnem numerum non extendit et undecumque inceptum; ideo loco huius capituli illud, si placet, pro textu habeatur.

Progressio est numerorum secundum aequales excessus augmentatorum aggregatio, ut universorum summa compendiose habeatur. Unde si ex aggregatione numeri ultimi cum primo resultat numerus par, per eius medietatem multiplicetur numerus locorum; si vero impar, per eum multiplicetur medietas numeri locorum, et exibit summa quaesita.

In hoc octavo capitulo duo fiunt. Primo enim describitur progressio, secundo de ea dantur duae regulae, per quas tota

haec species regulatur. Secunda ibi: *Unde si ex aggregatione.* Dico primo, quod progressio est aggregatio numerorum augmentatorum secundum aequales excessus, ut summa universorum aggregatorum compendiose, id est breviter, habeatur. Verbi gratia: si proponantur ista, scilicet 1. 2. 3. 4. 5. 6., quantum est in toto? vel sic: 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. In omnibus, in quibus sic itur, ita quod, in quanto secundus excedit primum, in tanto tertius secundum et quartus tertium, et sic deinceps, in omnibus talibus valet haec species. Incipias igitur ubi volueris, et sistas, ubi volueris, (et) salias, quantum volueris: dummodo uniformiter iveris vel salieris in dictis numeris, semper valebit id, quod dicetur. *Unde si ex aggregatione.* Hic dantur duae regulae hanc speciem rectificantes, et secundum hoc haec pars dividitur in duas, quoniam per numerum locorum et per numerum aggregatum ex primo numero et ultimo progressionis rectificatur haec species. Numerus igitur aggregatus ex numero primo et ultimo aut est par, aut impar. Iuxta hanc divisionem bimembrem sumantur regulae. Prima est: si ex primo numero cum ultimo resultat par numerus, tunc per eius medietatem multiplices numerum locorum. Verbi gratia: in progressione naturali sint ista: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. Iunge primum, scilicet unitatem, cum ultimo, scilicet 7, et proveniunt 8, per quorum medietatem, scilicet per 4, multiplices 7 loca positionum, et proveniunt 28. Vel sic: in progressione naturali 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15 sunt novem loca positionum, ex aggregatione primi numeri ad ultimum proveniunt 22, ergo per medietatem de 22, scilicet per 11, multiplices loca positionum, scilicet 9, et provenit summa totius progressionis, scilicet 99. Exemplum autem in intercisa progressione sit illud. Primo: 1. 3. 5. 7. 9. 11. Hic sunt sex loca positionum, et ex primo cum ultimo resultant 12; per horum igitur medietatem, scilicet 6, multiplices 6 loca positionum, et provenient 36, quod est summa progressionis. Secundo etiam illud in intercisa progressione: 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. Sunt igitur loca 7 positionum, et ex primo

cum ultimo resultant 36, qui est numerus par. Per medietatem (ergo) eius, scilicet per 18, multiplicentur loca positionum, scilicet 7, et proveniunt 126, summa totius progressionis. Regula secunda est, quod, si ex primo numero et ultimo resultat numerus impar, semper per illum multiplices medietatem numeri locorum sive positionum, et exibit summa in qualibet progressione. Verbi gratia: in progressione naturali sit hoc exemplum. Primo: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. Hic sunt octo loca positionum, et numerus aggregatus ex primo et ultimo est 9. Duc igitur 9 in medietatem de 8, scilicet in 4, et evenient 36, summa progressionis. Vel sic: 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. Hic sunt loca 10 positionum, et aggregatum ex primo et ultimo est 25. Duc igitur medietatem locorum, scilicet 5, in 25, et provenient 125, (summa totius progressionis).* Aliud exemplum in progressione intercisa esse potest illud: 1. 4. 7. 10. 13. 16. Hic sunt 6 loca positionum, et numerus aggregatus ex primo et ultimo fit 17. Hunc ergo multiplices per medietatem locorum, scilicet per 3, et provenient 51, (summa totius progressionis). Vel sic: 3. 8. 13. 18. 23. 28. Hic sunt 6 loca positionum, et ex primo et ultimo resultant 31. Hunc ergo multiplices per medietatem locorum, scilicet per 3, et provenient 93, summa totius progressionis. Unde debes hic indubitanter scire, quod vel numerus locorum erit par, vel numerus aggregatus ex primo et ultimo erit par, vel uterque.

SPECIES NONA, SCILICET DE RADICUM EXTRACTIONE.

Sequitur de radicum extractione etc[a]. Haec est nona species et ultima huius operis, in qua facit auctor duo. Primo enim praemittit capitulum quoddam praeambulum, in quo tangit quaedam, quorum cognitio est necessaria ad hanc speciem, et secundo de intento prosequitur, cum dicit: *Si velis igitur,* iuxta principium capituli sequentis, ubi alii aliud capitulum assignaverunt. Adhuc primo praemittit ea, quae declaranda sunt ad intentum principale, et secundo ea pertractat, cum dicit: *Prae-*

notanda tamen. Et hoc primo inquirit, quis sit numerus quadratus, et quae sit eius radix; et similiter quis sit numerus cubicus, et quae eius radix, et secundo notificat tertium propositorum, quid sit radicem extrahere, cum dicit: *Radicem numeri quadrati,* in principio capituli sequentis. Adhuc primo praemittit quandam divisionem, ex qua investigat duo. Primo iam proposita, et secundo membra dividentia pertractat, cum dicit: *Notandum etiam.* Circa primam partem est notandum, quod, sicut quantitatis continuae quaedam est linea unam dimensionem habens, et alia superficies habens duas, et alia corpus habens tres, sic etiam recte est de quantitate discreta, quae est numerus. *Numerorum* enim, ut dicit auctor, *alius est linearis, alius superficialis, alius solidus. Numerus linearis est:* hic pertractat membra dividentia, et primo duo membra pertractat, et secundo quasi subdividendo secundum membrum specialius de eodem. Secundum determinat, cum dicit: *Sed sciendum.* Adhuc primo praemittit subdivisionem suam, et secundo membra ostendit ibi: *Si igitur numerus.* Adhuc primo petractat primum membrum, et secundo secundum, cum dicit: *Si autem numerus bis.* Adhuc primo de primo membro investigat, quis sit numerus quadratus, sub quadam subdivisione membri primi, quia, si numerus semel ducitur in numerum, aut ducitur in se ipsum aut in alium. Si in se ipsum fit, est numerus quadratus, et quare quadratus dicitur. Si in alium fit, est numerus superficialis non quadratus, quasi diceretur, quod numerus quadratus est sub superficiali, et numerus non quadratus est sub eodem superficiali, quia superficialis absolute est ille numerus etiam absolute, qui ex ductu ⟨numeri⟩ in numerum semel provenit. Sed superficialis specialiter est, secundum quod est proveniens ex ductu numeri non cuiuslibet in quemlibet, sed numeri in quendam alium et similem eius. Sicut enim, sub animali si essent solum duae species, puta homo et quodcumque aliud ab homine, tunc, cum quodcumque aliud ab homine non habet forsan impositum unum nomen, dividendo

animal contingeret sic dicere: animalium quoddam est homo et quoddam est non homo, etiam sic est in proposito, ut patet. Et vocatur numerus quadratus, sicut dicit auctor, *quia divisim scriptus per unitates* constituit quadratum. Verbi gratia: iste numerus est quadratus, scilicet 4, et scribitur quatuor unitatibus sicut hic:

1 · 1
1 · 1

Et 9 est quadratus numerus et scribitur in quatuor lateribus aequalibus per novem unitates sic:

1 · 1 · 1
1 · 1 · 1
1 · 1 · 1.

Et ita de aliis. Sed in superficiali non quadrato non fiunt latera aequalia. Verbi gratia 6 provenit ex ductu ternarii in binarium, et scribitur sex unitatibus sic:

1 · 1 · 1
1 · 1 · 1.

Constat, quod latera non sunt aequalia; in uno enim sunt duo puncta et in alio tres. Opposita autem ⟨sunt quadrata et quadrangula, quia quadrata⟩ sola aequalia sunt, unde senarius bene est numerus quadrangulus, sed non quadratus. Unde sicut quadrangulum est superius ad quadratum, quia est et quadratum et quadrangulum non quadratum, sic superficialis ⟨numerus⟩ erit superius ad quadratum numerum, quia est ⟨et⟩ quadratus et ⟨quadrangulus⟩ non quadratus, et ideo dicit auctor, quod omnis quadratus est superficialis, sed non convertitur. *Radix autem:* hic ostendit, quae est radix numeri quadrati, et patet. *Si autem numerus bis:* hic pertractat secundum membrum dictae suae divisionis, quod aliquis numerus provenit ex ductu alicuius numeri bis in numerum, vel etiam, quod aliquis numerus bis ducitur in numerum. In quo membro dicit, quis sit numerus cubicus, et quae eius radix; et primo quasi in generali pertractat membrum hoc, notificans, quis sit numerus

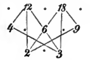
⟨solidus⟩ in genere, qui provenit ex ductu numeri in numerum bis absolute loquendo, non contrahendo ad eundem vel ad alium, et secundo quasi specialiter descendendo sub illo nomine membrum praedictum subdividit ibi: *Sed numerus* etc[a]. Adhuc primo ⟨duo facit, quia primo⟩ facit, quod dictum est, et secundo dat rationem impositionis nominis huius, quod est solidus, qui est numerus ille absolutus, et incipit secunda pars ibi: *Et dicitur solidus.* Dicitur igitur primo, quod, si numerus ducitur bis in numerum, constituet solidum, quia numerus solidus est, qui provenit ex duplici ductu numeri in numerum, scilicet non contrahendo ad eundem vel ad alium: sic enim haberetur species sub solido. *Et dicitur solidus:* haec pars plana est. *Sed numerus potest dupliciter bis* etc[a]: specialiter descendendo sub solido membra hic subdit constituendo species sub solido. Primo ergo subdivisionem illam ponit, et secundo membra dividentia pertractat, cum dicit: *Si igitur numerus bis ducatur.* Prima pars est plana, sed secunda dividitur in quatuor partes. Primo enim pertractat primum membrum, secundo secundum, cum dicit: *Si vero aliquis*; et tertio quasi corollarie per comparationem ad radicem quadratam dicit, quae sit radix cubica sive numeri cubici, cum dicit: *Ex praedictis etiam patet*; et quarto removet dubium ibi, cum dicit: *Cum igitur ex ductu unitatis.* Primo adhuc pertractando primum membrum notificat, quid sit numerus cubicus, et secundo dat rationem impositionis nominis eius, cum dicit: *Et dicitur cubicus.* Dicitur igitur primo, quod, si numerus ducatur bis in se vel semel in suam quadratum, quod idem est, tunc fit numerus cubicus, et dicitur cubicus solidus, quia est species solidi. *In se bis:* verbi gratia ter tria ter, *vel semel in suum quadratum,* ut ter novem; proveniunt 27 utrobique. Cum enim dicitur ter tria, habentur 9, quod est quadratum de tribus, et cum replicatur ultimo ter, illa replicatio extenditur ad totum, quod praecessit, scilicet ad ter tria vel ad 9, et ideo idem est, ducere numerum, quemcumque velis, in suum quadratum vel bis in se ipsum. *Est*

autem cubus corpus quoddam sex habens superficies, sicut potest ymaginari de taxillo bene verificato, in quo scilicet est profunditas, longitudo et latitudo eiusdem quantitatis et distentionis. Sic numerus iste tres habet numeros ipsum dimetientes. Esto ergo, quod sit linea trium pedum sive punctorum. Ducantur ergo haec tria puncta in se, et fiunt 9, qui est numerus quadratus mensuratus numero lineari, scilicet 3, bis sumpto, et tali quasi linea trium pedum flueute ad tantam distantiam in ante, quanta est eius longitudo, constituitur quaedam superficies more mathematicorum loquendo. Deinde in eadem novenario ducatur eadem linea, ac si in deorsum fluens secum totam superflciem hanc trahens ad tantam ⟨distantiam⟩ descenderet, quanta est eiusdem longitudo sive totius superficiei latitudo, et sic quasi quoddam corpus constitutum est, quod sic factum habebit in qualibet sex superficierum 9, et in quolibet duodecim laterum 3 puncta, et ab angulo quolibet in angulum oppositum in quamcumque partem habebit etiam tria puncta, et ideo merito hic numerus cubicus est vocatus. *Si vero aliquis numerus:* pertractat membrum secundum, notans, qualiter appelandus sit numerus, qui ex opposito distinguitur contra numerum cubicum; et primo facit hoc, secundo comparat numerum cubicum ad solidum, cum dicit: *Unde patet, quod omnis numerus cubicus.* Primo ergo dicit, quod, si numerus bis ducatur non in se, sed in alium, est numerus solidus non cubicus, et ut legatur sub uno, dicit secundo comparando numerum cubicum ad solidum, quod omnis numerus cubicus est solidus et non e converso; et haec est comparatio speciei ad genus, sicut superius erat de quadrato et superficiali. *Ex praedictis igitur patet:* per comparationem ad radicum numeri quadrati ostendit, quae est radix numeri cubici. Unde dicit, quod, sicut ex praedictis patet, idem numerus est cubici et quadrati radix. Hoc ex praedictis patet, cum idem est per dicta prius ducere numerum in se bis vel semel in suum quadratum; et subdit, quod tamen non idem cubicus et quadratus sunt unius et eius-

dem radicis. Verbi gratia: iste numerus 729 est quadratus et cubicus, sed non idem numerus est eius radix, ut est cubicus, et ut est quadratus. Ymmo, ut est quadratus, radix eius est 27, ut autem est cubicus, radix eius est 9. Et similiter iste numerus, scilicet 4096, est cubicus et quadratus, non tamen idem numerus est eius radix, ut est quadratus, et ut est cubicus. Ymmo, ut est quadratus, est eius radix 64, et ut est cubicus, est eius radix 16. Et subdit, quod etiam patet, quod omnis numerus est radix quadrati et cubici; quod patet ex hoc, quia, cum numerus non stat in sursum, quomodo quemcumque numerum convenit ducere semel in se, convenit eundem ducere in se bis. Sed non tamen omnis numerus est quadratus vel cubicus, quia superficialium quidam est quadratus et quidam superficialis non quadratus; item solidorum quidam est cubicus, quidam solidus non cubicus, sicut patet per praedicta. *Cum igitur ex ductu:* removet dubium, quod sic ex dictis ortum habet. Dixit enim, quod 4 est primus numerus quadratus, et radix eius est 2, ex quo sequitur, quod 2 est prima radix et minima. Ex isto dubitaret aliquis, utrum unitas sit numerus, cum non possit esse alicuius numeri radix, quia 2 est radix minima. Ideo introducit auctor partem istam, et stat summa partis in hoc, quod unitas non ⟨est⟩ aliquis numerus in actu, quia numerus est multitudo, sed potentialiter est unitas omnis numerus, quia est ut materia. Per replicationem enim unitatis omnis numeri quantitas efficitur. *Notandum etiam:* subdit quaedam notabilia, et sunt tria. Primum est hic; secundum ibi: *Inter duos cubicos*; et tertium per modum corollarii ponitur ibi: *Cum igitur ultra.* Primum est, quod inter duos quadratos numeros proximos est unicum medium proportionale, quod scilicet provenit ex ductu radicis unius quadrati in radicem alterius. Verbi gratia 4 est numerus quadratus, cuius radix est 2 sive binarius, et alter numerus quadratus proximus est 9, cuius radix est ternarius. Inter 4 et 9 est unicum medium proportionale, scilicet 6, quod provenit ex ductu 2 in ternarium,

quia bis tria sunt 6, et vocatur illud medium proportionale, quia, quae est proportio quadrati maioris, scilicet 9, ad illud medium, eadem est proportio eiusdem medii ad minorem quadratum: utrobique enim est proportio sexquialtera. Sicut enim 9 continet 6 et eius medietatem, sic 6 continet 4 et eius medietatem. Et nota quod illi quadrati sunt proximi, inter quorum radices non est medium vel numerus medius. Propter hoc igitur novenarius et quaternarius sunt quadrati proximi, quia inter radicem unius et radicem alterius non est medium, scilicet inter 2 et 3. Et dicit auctor significanter, quod inter duos quadratos proximos est unicum medium proportionale, quia, si aliquando sumantur duo quadrati non proximi, sicut sunt 4 primus quadratus et 49, constat, quod isti non sunt quadrati proximi, quia radix primi est 2, secundi autem 7; et inter eos est medium, ymmo plura media, scilicet 3, 4, 5, 6; et ideo inter istos duos quadratos sunt plura media proportionalia, scilicet 42, 36, 30, 25, 20, 16, 12, 9 et 6. Sicut enim maior quadratus, scilicet 49, continet 42 et eorum sextam partem, sic 42 continet 36 et eorum sextam partem. Item sicut 36 continet 30 et eorum quintam partem, sic 30 continet 25 et eorum quintam partem. Adhuc sicut 25 continet 20 et eorum quartam partem, sic 20 continet 16 et eorum quartam partem. Sicut insuper 16 continet 12 et eorum tertiam partem, sic 12 continet 9 et eorum tertiam partem. Ultimo sicut 9 continet 6 et eorum medietatem, sic 6 continet 4 et medietatem de 4, quae quatuor sunt minor quadratus. Sic ergo apparet, quod non est necesse semper inter duos quadratos tantum unum esse medium proportionale, et ideo addit auctor proximos. Deinde cum dicit: *Inter duos cubicos*, ponit notabile secundum; et est, quod inter duos numerus cubicos proximos est duplex medium proportionale, scilicet maius medium et minus. Verbi gratia: primus cubicus est 8, secundus proximus est 27; radix primi est 2, radix secundi 3, et ideo sunt proximi numeri, quia inter eorum radices non est medium. Inter istos

cubicos est duplex medium proportionale, scilicet 18 et 12. Sicut enim 27 semel continet 18 et medietatem eorum, sic 18 continet 12 et medietatem eorum, et consimiliter 12 continet 8 et medietatem eorum, ita quod omniquaque est proportio sexquialtera; et proveniunt haec sic, sicut dicit auctor, quod ducendo radicem maioris cubici in quadratum minoris cubici provenit minus medium (sic scilicet, quia radix maioris cubici erat 3, et quadratum minoris cubici erat 4, ducendo 3 in 4 erunt 12, quod est minus medium proportionale), ducendo iterum radicem minoris cubici, scilicet 2, in quadratum maioris cubici, scilicet in 9, exibit maius medium, scilicet 18. Et ordines istos numeros in tali figura:



et ponatur in spatio, ut videtur. Et sciendum, quod, in quacumque proportione sunt radices ad invicem, in eadem sunt media ista, quod, quae est proportio radicis maioris ad minorem, eadem est proportio maioris cubici ad maius medium, et maioris medii ad minus, et minoris medii ad minorem cubicum. Hoc generaliter est verum in omnibus, et potest illud etiam ostendi in aliis numeris. Sit minor radix 4 et maior 5. Ducatur 4 in se semel, et exibunt 16, suum quadratum, cuius cubicus est 64. Deinde ducatur maior radix, scilicet 5, in se semel, et exibunt 25, suum quadratum, cuius cubicus est 125. Duc ergo unam radicem in aliam, et exibunt 20, ⟨medium⟩ proportionale inter duas quadratos numeros, scilicet inter 25 et 16. Deinde ducatur radix minoris cubici, scilicet 4, in quadratum maioris cubici, scilicet in 25, et exibit medium maius proportionale, scilicet 80. Si ergo velis scire, in qua proportione se habet maior quadratus ad medium suum, et maior cubicus ad maius medium etc[a], videas, in qua proportione se habet radix maior ad minorem; et constat, quod 5 se habet ad

4, in proportione sexquiquarta, quia 5 continet 4 et quartam partem eorum. Eodem modo se habet maior quadratus ad medium proportionale, et idem medium proportionale ad minorem quadratum, scilicet 25 ad 20 et 20 ad 16, quia 25 continet 20 et quartam partem de 20, et similiter 20 continet 16 et quartam partem de 15. Consimiliter maior cubicus continet 100 et quartam partem eorum, quae est 25, et consimiliter 100 continet 80 et quartam partem de 80, quae sunt 20; et similiter 80 continet 64 et quartam partem eorum, scilicet 16. Sic ergo quae est ⟨proportio maioris radicis ad minorem radicem, eadem est⟩ proportio maioris quadrati ad medium unicum, et eiusdem medii ad minorem quadratum; et similiter eadem est proportio maioris cubici ad maius medium, et maioris ad minus, et minoris ad minorem cubicum. Insuper quae est proportio minoris medii proportionalis ad medium inter quadratos, eadem est eiusdem medii inter quadratos ad maiorem radicem; et quae est proportio maioris medii ad medium inter quadratos, eadem est proportio eiusdem ⟨medii inter quadratos⟩ ad minorem radicem. Item quae est proportio maioris medii ad maiorem quadratum, eadem est medii quadratorum ad maiorem radicem, et quae est proportio minoris medii ad minorem quadratum, eadem est proportio medii quadratorum ad minorem radicem. Istud verum est universaliter in omnibus numeris sine dubio. *Cum igitur ultra* etc^a^: hic est notabile tertium per modum corollarii, in quo facit auctor tria. Primo enim dat limitum numerum, secundo in generali ostendit, quid sit limes, et tertio in speciali ostendit, quid sit ⟨limes⟩ unusquisque. Dicit primo, quod limites non sunt nisi novem, quia ultra summam numerorum solidorum in hac arte numeratoria non proceditur; generalia ista in fine partis videbuntur. Et tunc cum dicit: *Est enim limes,* diffinit limitem in generali dicens, quod limes est continua ordinatio numerorum contentorum terminis extremis, terminis dico eiusdem naturae existentibus. Huiusmodi enim diffinitio iam apparebit in fine partis. Deinde cum dicit: *Unde*

primus, notificat in speciali, quis sit unusquisque eorum novem limitum. Limes primus. Dicit igitur, quod limes primus est continua progressio novem digitorum, verbi gratia: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. Secundus limes. Secundus vero est continua ordinatio novem articulorum principalium, qui vocantur denarii, verbi gratia: 10. 20. 30. 40. 50. 60. 70. 80. 90. Tertius limes. Et tertius limes est continua progressio sive ordinatio novem centenariorum, verbi gratia: 100. 200. 300. 400. 500. 600. 700. 800. 900. Quartus limes. Quartus limes est novem millenariorum, ut 1000. 2000. 3000. 4000. 5000. 6000. 7000. 8000. 9000. Et subdit, quod etiam tres limites resultant in compositis per appositionem digitorum super quemlibet istorum scilicet limitum. Quintus limes. Verbi gratia: apponantur digiti omnes, qui sunt in primo limite, super denarios, qui sunt in secundo limite, et fiet quintus limes, ut 11. 12. 13. 14 usque ad 19; vel 21. 22. 23. usque ad 29; vel 31. 32. etc.[a] et sic usque ad 39. Et sic apponendo omnes digitos super 10, et super 20, et super 30 usque ad 90 fit iste limes quintus, ita quod maior numerus in hoc limite est 99. Sextus limes. Apponantur ergo omnes digiti super omnes centenarios, qui sunt in tertio limite, et fiet sextus limes. Verbi gratia: 101. 102. 103, usque ad 109; vel 201. 202. 203, usque ad 209; et sic apponendo omnes digitos super omnes centenarios, scilicet super 100, super 200, super 300, ⟨et ita⟩ usque ad 900 fit iste limes sextus, ita quod maior numerus in hoc limite est 909. Septimus limes. Apponantur igitur omnes digiti super omnes millenarios, qui sunt in quarto limite, et fiet limes septimus. Verbi gratia: 1001. 1002. 1003, et sic usque ad 1009; vel sic 2001. 2002. 2003 usque ad 2009; et sic apponendo omnes digitos super omnes millenarios, scilicet super 1000. 2000. 3000. usque ad 9000 fit iste limes septimus, ita quod maior numerus in hoc limite est 9009. Sed addit auctor, quod est, si alter alteri praeponatur, resultabit aliquis de his tribus limitibus. Verbi gratia: 110. 111. 112. 113. usque ad 119; vel 120. 121. 122. 123. usque ad 129; vel 130. 131. 132. 133.

usque ad 139; praeponendo sic aliquem de denariis cum omnibus digitis ante centum; et eodem modo praeponendo eosdem ante ducenta vel trecenta etcª; ⟨et⟩ consimiliter praeponendo centenarium ante millenarios cum omnibus digitis, ut 1101. 1102. 1103, vel 2101, 2102; et consimiliter etiam praeponendo denarios cum omnibus digitis ante millenarios ⟨et centenarios, ut 1111. 1112, vel 2111. 2112, vel 1211. 1212 etcª⟩, quilibet istorum ad aliquem trium aliorum limitum reducitur, ita quod, si digiti praeponantur denariis, ⟨ad quintum reducuntur, si digiti praeponantur denariis⟩ praecedente centenariorum aliquo ad sextum reducuntur, sed si digiti praeponantur centenariis millenariorum quocumque praecedente, ad septimum limitem reducuntur. Ita credo auctorem esse intelligendum. Et tunc, quantum ad octavum et nonum limitem, dicit auctor, quod limes penultimus et ultimus, id est octavus et nonus, resultant per replicationem termini finalis supra se quocumque alio praecedente; ex replicatione, dico, millenarii supra se semel per modum quadratorum, vel bis per modum solidorum. *Limes octavus.* Auctor vult dicere, quod limes octavus fit, cum supra millenariorum aliquem millenarius replicatur. Verbi gratia: mille milesies, duo milia millesies, tria milla millesies, quatuor milia millesies, et sic usque ad novem milia millesies, vel millesies novem milia; et fit idem limes praeponendo isti replicationi quemcumque de aliis limitibus, scilicet dicendo: millesies centies decies mille, millesies centies decies duo milia, millesies centies decies tria milia et sic usque ad millesies centies decies novem milia; vel millesies ducenties vicesies mille, vel duo milia, vel tria milia. Sicque eundo et replicando semper millenarium semel super quemcumque millenariorum quocumque praecedente fit ille octavus limes. *Nonus limes.* Nonus vero limes fit fero modo consimili. Non enim differt, nisi quia in hoc nono limite fit replicatio millenarii bis super quemcumque millenarium, etiam quocumque praecedente. Verbi gratia: millesies mille milia vel millesies mille millesies,

quod idem est, vel millesies duo milia millesies, millesies tria milia millesies, vel millesies decem milia millesies, vel millesies XX milia millesies, vel millesies XXX milia millesies, vel millesies centum milia millesies, vel millesies ducenta milia millesies, vel millesies trecenta milia millesies, vel millesies centum et decem milia millesies, millesies ducenta et XX milia millesies etc[a]. Hoc modo intelligi debet limes iste nonus. Ex dictis patent duo prius obmissa et supposita. Quia ⟨primo⟩ accepta est haec continua valere ⟨ibi⟩: *Cum ultra summam numerorum solidorum non fiat in hac arte processus, ideo tantum novem sunt milites.* Hoc ⟨nunc⟩ patet, quia tot debent esse limites, quot in numeris possibile est fieri progressus continua apprehensione ymaginatione stantis. Sed novem limitum processu eundo usque ad replicationem millenarii supra quemcumque bis stat apprehensio ymaginationis, et non ultra ⟨it⟩, sicut patet in numeris iam explificatis ad nonum limitem adductis, ymmo vix ymaginatio apprehendat illud: ergo etc[a]. Vel sic ostendit, quod completiva et ultima dimensionum est dimensio trina; et ideo cum numerus solidus dimensione triplici mensuretur, ultra ipsum etiam non convenit transcendere. Ideo concludere possumus, quod, cum limes nonus est in genere numerorum solidorum, tantum novem erunt limites et non plures. Iterum secundo suppositum est, quod *limes est continua ordinatio numerorum contentorum terminis extremis eiusdem naturae.* Illud nunc manifestum est inducendo ex omnibus limitibus. Extrema enim primi limitis sunt eiusdem naturae, quia utrumque extremum est digitus, scilicet 1 et 9; similiter secundi utraque sunt articuli principales, scilicet 10 et 90; extrema tertii sunt centenarii, scilicet 100 et 900, etc[a].

RADICIS NUMERI QUADRATI EXTRACTIO.

Radicem numeri quadrati etc[a]. Ista littera continet unam partem et continuatur sic. Superius auctor notificavit, quis sit numerus quadratus, et quae eius radix. Item in secundo, quis

sit numerus cubicus, et quae eius radix. Consequenter hic notificat tertium propositorum, scilicet quid sit radicem extrahere, et patet pars illa. *Si velis igitur:* praemissis praeambulis ad intentum necessariis exequitur de intento, et primo determinat de extractione radicis in quadratis, secundo in cubicis. Secundum ibi: *Sequitur de radicum extractione.* Circa primum tria facit. Primo enim docet, in quo numero est incipiendum operari in extractione radicis de numero quadrato, et secundo docet, qualiter sit operandum, et tertio dat modum rectificandi suam operationem. Secunda ibi: *Sub ultima igitur figura;* tertia ibi: *Quo facto aut.* Pars prima manifesta est de se. Sequitur illa pars. *Sub ultima igitur,* in qua docet, qualiter est operandum. Circa istam partem notandum est, quod haec species completur in inventione digitorum quorundam, et ipsorum in se et in sua duplata ductione, et in producti a numero proposito subtractione. Ideo auctor primo docet, quid agendum sit, quantum ad processum primum, scilicet quantum ad inventionem digiti primi; secundo, quantum ad digitos alios cum dicit: *Quo facto.* Primo dicit, quod sub ultima figura in impari loco posita incipiendum est operari, et inveniendus est ibi quidam digitus, qui ductus in se quadrato modo, scilicet semel, deleat totum suprapositum respectu sui, vel in quantum vicinius potest. Vult dicere, quod illud, quod ex ductu ⟨inventi digitis⟩ in se semel provenit, detrahi debet ab eo, quod ex directo ei supraponitur. Et nota, quod figura illa, quae directe alteri figurae supraponitur, cum omnibus versus sinistram positis dicitur figurae suprapositum. Et subdit auctor, quod tali digito invento ⟨et ducto in se⟩ et a superiori isto modo subtracto, duplandus est iste digitus, scilicet primo inventus, et duplatum sive duplum eius ponendum est sub proxima figura versus dextram, et eius subduplum, quod est digitus primo inventus, debet poni sub illo duplato. Et nota, quod, si duplum hoc fuerit articulus vel numerus compositus, tunc loco digiti primo inventi debet poni articulus et digitus seu cyfra loco memorato,

scilicet sub proxima figura ante, et sub illo digito seu cyfra locari debet subduplum illud, qui est digitus primo inventus. *Quo facto:* determinat hic de inventione aliorum digitorum, et primo secundi, et quomodo circa ipsum sit agendum; secundo innuit, quid circa alios processus, id est circa inventionem aliorum digitorum et iuxta eorum modum agendi sit faciendum. Secunda ibi: *Nec cessandum.* Adhuc primo (duo facit, quia primo) facit, quod dictum est, secundo dat cautelam quandam hic observandam, cum dicit: *Si autem contingit.* Pars prima cum secunda si quid scrupulosum habent, in fine videbitur, cum me transtulero ad exemplum. *Nec cessandum est:* hic innuit, quid circa alios processus sit agendum, et patet in littera, et magis patebit infra. *Quo facto:* dat modum rectificandi hanc operationem, et est duplex. Per primum habetur, utrum numerus propositus fuerit quadratus, et quae sit eius radix; per secundum habetur, utrum erratum sit in operatione necne. Secundus modus ponitur ibi: *Si velis igitur.* Et planae sunt ambae partes. Et in exemplum dictorum sit numerus iste propositus 9548198. Unde, (cum) figurae sunt in numero impari, sub ultima incipiendum est operari, et ibi inveniendus est quidam digitus, et erit 3, quem ducas in se, et productum, scilicet 9, deleas a figura sibi supraposita, et loco figurae ultimae nichil remanebit. Quo facto dupletur digitus inventus, et duplum eius, scilicet 6, ponatur sub proxima figura versus dextram, scilicet sub 5, et eius subduplum, scilicet 3 vel tres, sub eo, scilicet sub duplo, et stabunt figurae sic:

548198
6
3

Quo facto inveniatur quidam digitus sub proxima figura, scilicet sub 4, quem ducas in duplatum etc[a]; et constat, quod nullus hic poterit inveniri, quia 6 nequaquam de 5 subtrahitur. In hoc casu, sicut dicit cautela, debet poni 0, scilicet cyfra, sub tertia figura versus dextram inclusive, et sub illa 0 etiam cyfra,

et postea anteriorandum est duplum cum suo subduplo per unam differentiam, et tunc stabunt figurae in fine in hunc modum:

548198
60
30

Quo facto inveniendus est digitus quidam sub proxima figura versus dextram, scilicet sub unitate, qui in duplatum ductus deleat supra duplata, deinde ductus in se deleat supra se; et erit digitus ille 9, quo ducto in sex provenient 54, quae deleas, et totum tolletur supra 6. Deinde eodem ducto in se provenient 81, quae deleas supra ipsum digitum, et totum etiam tolletur. Est etiam alius modus subtrahendi, sicut auctor tetigit in littera, scilicet ut ducatur digitus ⟨ultimo inventus⟩, scilicet 9, in duplatum, in 6, et ponatur productum supra 6. Deinde ducatur ille digitus, scilicet 9, in se, et productum, scilicet 81, ponatur supra eundem digitum, ita quod prima secundi producti stabit ante primam primi producti; ita dicit littera, verumptamen propter cyfram mediam in hoc casu ultima etiam figura secundi producti stabit ante primam primi producti, et stabunt figurae sic:

5481
548198
609
30

Deinde subtrahas singulas de singulis, et stabit residuum sic:

98
609
30

Quo facto dupletur digitus iam inventus, scilicet 9, et duplum eius, scilicet 18, ponatur sub proxima figura versus dextram, sub 9, ponendo, sicut supra dixi, digitum illius numeri compositi, scilicet 8, sub figura proxima illa, et digitum ⟨articuli⟩, scilicet 1, loco eiusdem digiti secundi, et ille 9, qui iam est subduplum ad 18, ponatur sub suo duplo, ita quod sub digito

semper ponetur digitus, et stabunt figurae hoc modo:

98
6018
30 9

Deinde anteriores duplata cum subduplis, scilicet 60, quae sunt dupla, ⟨et 30, quae sunt subdupla⟩, et stabunt figurae sic:

98
618
309

Quo facto inveniatur quidam digitus ante omnia duplata, scilicet sub prima figura, quae est 8, qui ductus in omnia etc[a]. Et constat, quod nullus erit, et ideo in hoc casu ponenda est 0 seu cyfra sub prima figura, sub qua inveniendus esset digitus. Sed auctor de hoc non facit mentionem; et stabunt figurae hoc modo:

98
6180
309

⟨Sic 98 remanebunt⟩, sicut dicit auctor, quod numerus propositus non fuerit quadratus, sed radix quadrati maximi sub illo numero contenti est 0 ultimo habita cum subduplis, scilicet 3090. Quae si ducatur in se, exibit maximus quadratus ex numero proposito extractus, scilicet 9548100. Quibus si residuum, scilicet 98, addideris, exibunt figurae, quas prius habuisti, scilicet 9548198, et ideo non est erratum. Illud etiam probes aliter per probam ut in praecedentibus. Videas enim, quae sit proba radicis 3090, et constat, quod 3. Ducas eam in se semel per modum quadratorum, et provenient 9, quibus abiectis erit proba radicis ductae in se cyfra. Deinde videas, utrum proba numeri primo propositi sit etiam cyfra. Tunc enim bene operatus est, dato quod numerus propositus fuerit quadratus, ita quod completa operatione nichil sit residuum. Sed hic est residuum, scilicet 98; eis de toto numero subtractis sumatur residuum, scilicet 9548100, cuius proba si fuerit 0, bene invenisti radicem, sin autem non, non. Et constat, quod proba

numeri huius sit cyfra, constat igitur, quod in toto est bene factum.

DE RADICUM EXTACTIONE IN NUMERIS CUBICIS.

Sequitur de radicum extractione etc^{a}. Cum igitur executus sit auctor de his, quae proponebantur determinanda circa radicis extractionem in numeris quadratis, consequenter aggreditur hic determinando de eisdem propositis circa radicis extractionem in cubicis, et facit duo. Primo enim proponit seu praemittit quaedam necessaria ad propositum, et secundo de intento exequitur, cum dicit: *Proposito.* Adhuc primo facit ⟨duo, quia primo facit⟩ hoc in generali, et secundo singulum notificat in speciali, cum dicit: *Est igitur numerus.* Prima pars patet. In secunda tria facit secundum numerum trium praemissorum, et patet pars quaelibet, quarum secunda incipit ibi. *Radix autem*; tertia ibi: *Radicem autem cubicam. Proposito ergo aliquo numero:* exequitur et facit tria, quia primo disponit figuras, et secundo docet operari secundum modum, quem auctor iste assuevit, id est secundum modum, quem compositor huius tractatus magis ab inventore huius artis invenerit traditum; et tertio dat alium modum novum considerandi ordinem figurarum pro inceptione operis, qui modus idem est realiter cum priore, et hoc facit in fine, cum dicit: *In hac autem radice.* Adhuc primo docet operari in extractione radicis a pluribus figuris quam tribus, et secundo, cum fuerint tres vel pauciores in numero proposito, cum dicit: *Notandum etiam.* Circa primum adhuc duo facit. Primo enim facit, quod dictum est, et secundo dat quandam cautelam hic observandam, cum dicit: *Si autem aliquis digitus.* Adhuc primo docet, qualiter sit hic operandum, et secundo docet rectificare operationem ibi: *Hoc autem facto.* Adhuc primo docet, quid sit agendum iuxta inceptionem huius operationis, et secundo docet, qualiter in sequentibus sit procedendum ibi: *Quo facto triplandus.* Partes omnes patebunt in exemplo. In secunda parte duo facit. Primo enim docet, qua-

liter in sequentibus sit procedendum, et secundo ponit quendam novum modum subtrahendi, cum dicit: *Notandum etiam.* Tota pars prima legatur continue et videbitur in exemplo. *Hoc autem facto:* docet rectificare operatum, et patebit in exemplo. *Si autem aliquis digitus:* dat quandam cautelam hic observandam, quae etiam videbitur in exemplo. *Notandum etiam:* hic innuit, quid sit agendum, cum figurae numeri propositi fuerint tres aut pauciores. *In hac autem radice:* dat modum alium considerandi figurarum ordinem, et recapitulat in fine. Et ut pateat satis ad evidentiam omnium dictorum sive suppositorum, sit numerus, cuius radicem velis extrahere, iste 751089429. Computes ⟨igitur⟩ figuras per 4 sive per loca millenariorum, et sub loco ultimi millenarii, scilicet sub 1, inveniendus est quidam digitus, qui ductus in se cubice, scilicet bis, deleat totum suprapositum respectu sui, vel in quantum vicinius potest. Erit autem digitus iste scilicet 9, quem ducas in se positum sub 1, et proveniunt 81. Loces igitur 8 supra 5 versus sinistram et 1 supra 1, sub qua est digitus 9. Deinde ducas eundem 9 in productum, et erunt 729, et stabunt 9 supra 1, sub qua est digitus inventus, scilicet 9, et 2 supra 5 versus sinistram, et 7 supra 7, quae est figura ultima. Quo igitur facto deleas singulas de singulis, et de 7 remanebit nichil, de 5 duo, et loco 1 duo, et stabunt figurae sic.

22089429
9

Deinde digitum inventum triplices, et triplatum, scilicet 27, ponas sub tertia figura proxima versus dextram inclusive, scilicet sub 8, ita quod digitus, qui est pars illius numeri compositi, scilicet 7, ponatur sub illa figura, et digitus articuli, scilicet 2, ponatur sub proxima figura versus sinistram, scilicet sub 0, et subtriplum sub triplo sic:

22089429
27
9

Deinde inveniendus est alter digitus sub proxima figura versus dextram ante triplatum, scilicet sub 9, qui cum subtriplo ductus in triplatum, deinde sine subtriplo ductus etc^{a}. Et illud sic faciendum est. Pouatur digitus, quem credideris inveniendum sub ultima figura triplati, et subtriplum post ipsum proximo versus sinistram, ut si credas, quod digitus inveniendus erit scilicet 1; et stabunt figurae hoc ordine:

22089429
27
91

Ducas igitur 91 in 27 per modum multiplicationis primo, et quidquid provenit ponas supra figuras supremas, et stabunt figurae perfecta multiplicatione recte in hunc modum:

2257
22089429
27
91

Et tunc digitum inventum duxisti cum subtriplo in triplatum, et hoc est primus processus. Deinde eundem digitum sine subtriplo ducas in productum, id est in numerum in supremo stantem, scilicet in 2457, et provenit idem numerus, quia, sicut supra dictum est, ex ductu numeri in unitatem vel e contrario non crescit aliquis numerus: duo igitur facta sunt; siquidem duxisti digitum inventum cum subtriplo in triplatum, et iterum eundem digitum sine subtriplo in productum. Subtrahas igitur singulum de singulo, et non poteris. Nullus igitur digitus erit. In hoc casu, sicut vult auctor, ponatur cyfra sub 0 sub tertia figura versus dextram exclusive, (vel, ut dicit auctor, sub quarta inclusive), scilicet sub 2, et anteriorentur triplum cum subtriplo versus dextram per duas differentias, et stabunt figurae isto modo:

22089429
270
90

Quo facto inveniatur digitus sub prima figura, scilicet sub 9,

qui cum subtriplis etc[a], et erit 9, quem tum duxeris cum subtriplis in triplata, et exibunt istae figurae, 24543, quem productum vocat auctor, in quem ducas adhuc digitum eundem, scilicet 9, et exibunt istae figurae 220887, quae tollas respectu triplatorum, subtrahendo primam scilicet 7, ab illa, sub qua est 7, et stabunt figurae sic:

220887
22089429
2709
90

Facta autem subtractione stabit residuum isto modo:

729
2709
90

Deinde ducas adhuc ištum digitum eundem in se cubice, et provenient figurae 729, quo subtracto de residuo nichil remanebit de numero proposito. Quia igitur 0 est residuum, numerus primo propositus erit cubicus, cuius radix est digitus ultimo inventus praepositus cum subtriplis, et est ista 909. Quam si duxeris in se cubice, redibunt figurae primae. Ad hoc autem faciendum ordinentur semper figurae isto modo:

909
909
909

Ducas infimas in medias, et provenient 826281, et easdem insuper in primas, et provenient deinde 751089429. Si autem aliquid fuisset residuum, ei, quod provenit ex ductu radicis in se cubice, addatur illud residuum, et redibunt eaedem figurae, quae primo erant, si recte fecisti. Istud idem examinare poteris per probam. Sumatur enim proba radicis, et eam ducas in se cubice, et si proba iterum provenientis aequalis fuerit probae numeri propositi, bene est factum, si autem non, eratum est. Verbi gratia: radix numeri nunc proposi est 909, cuius proba est cyfra, quam si in se duxeris cubice, adhuc erit 0. Videas

igitur, si proba numeri propositi sit 0; et constat, quod sic; bene igitur actum est. Si etiam aliquid esset residuum, subtracto illo de totali numero proba residui ostendit intentum. Et hoc credo sufficere ad intellectum eorum, quae in algorismo continentur.

Verumptamen, quia radicum extractio in numeris cubicis laboriosa videtur et penalis propter difficultatem inveniendi digitum, qui cum subtriplis etc[a], ideo compendium quoddam ad hoc diu investigans post omnes visos angulos qualecumque remedium adinveni, ad cuius intellectum praemitto quaedam. Quorum primum est, quod, cum aliquis numerus alicui figurae addi dicitur vel alicui figurae suprascribi, si ille numerus fuerit digitus, ut sic sibi addetur vel sibi suprascribetur; si vero articulus vel numerus compositus, addito vel scripto articulo versus sinistram, cyfra vero vel digito supraposito vel addito figurae memoratae totus numerus illi figurae addi dicetur. Secundum est, quod, cum aliquis numerus sic additur aliqui figurae respectu figurae subscriptae, directe addi dicetur. Tertium est, quod, cum in multiplicatione quaelibet figura unius in quamlibet alterius duci habeat, quocumque ordine hoc fuerit, in idem redibit; et hoc est verum, ⟨sive coniunctim⟩, sive divisim hoc fiat. Verbi gratia: si multiplicare velis 98 per 64, sive duxeris 6 et 4 coniunctim in 9 et 8 vel divisim, idem redibit; nec de aliquo debet intelligi dictum meum, error ⟨enim⟩ non erit, si duxeris prius 4 in 98 quam 6, vel 64 prius in 8 quam in 9. Quartum est, quod, si supra quamque figuram ponitur sive scribitur sive eique additur minoris numeri figura, respectu illius ponitur sive scribitur ⟨sive additur⟩ ille numerus, cui supraponitur sive additur illa figura minorem signans numerum; et hoc est proprie idem cum secundo ex his. Proposito ⟨ergo⟩ numero quocumque computa numerum figurarum, et incipias operari sub ultimo ternario, sive completus fuerit sive non, sive sub ultimo loco millenarii; et sit numerus ille 1234567890. Ultima figura, scilicet 1, ⟨erit⟩ in loco ternarii ultimi, quia pri-

mus ternarius completus est in 8, secundus inceptus in 7 et completus in 5, et tertius inceptus in 4 et completus in 2, et ultimus inceptus est solummodo in ultima figura, scilicet in 1, et illa eadem unitas est etiam in ultimo loco millenarii. Primus enim est 7, secundus 4, et ultimus 1. Ibi igitur incipias, et erit digitus ibi inventus scilicet 1, qui ductus in se bis adhuc est 1. Deleas igitur illam ultimam 1, et triplum eius ponas sub tribus, et subtriplum id est 1, sub eo, et stabunt figurae isto modo:

234567890
3
1

Quo facto sub 4 inveniendus est digitus, qui sic invenietur generaliter. Pone 0 sub ultimo triplo, et ordines versus sinistram omnia subtripla eo ordine, quo sunt (inventa), et ducas omnia subtripla in omnia triplata per modum multiplicationis; et quidquid ex ductu cuiuslibet in quemlibet proveniet, supra illam numeri propositi ponas, sub qua est multiplicans, eo modo, quo in primo praemissorum dictum est. Quo facto ducas digitum, quem velis, in ultimam figuram totius producti; et si excrescat maior numerus, quam significetur per ultimas figuras numeri propositi, ille digitus non est, quem intendis. Si autem sic, transcurrendo per digitos, tandem ex ductu alicuius in eandem ultimam producti proveniet numerus non transcendens ultimas figuras numeri propositi. Confidas, quod iste sit digitus, quem intendis, quia necessario vel erit ille vel proximus minor. Ad propositum ergo ponatur 0 sub triplo, et subtriplum ponas versus sinistram sub proxima vel sub figura proxima illi, sub qua est triplum, scilicet sub 2, quae nunc est ultima, et ducas subtriplum in triplum ponens, quod provenit, supra figuram, sub qua est subtriplum, scilicet supra 2, et constat, quod statim exceditur ultima figura propositi numeri. Sed multo fortius exceditur facta ductione ulteriori, et ideo certus sis, quod nullus digitus hic invenietur. Ponas ergo 0 sub 0 sub 6, et

anteriores triplum sub 5 cum suo subtriplo, ut stent figurae isto modo:

234567890
30
10

Deinde sub 7 inveniatur digitus modo hoc, quo dictum est. Ponas ergo 0 sub 3, scilicet sub ultima triplatorum, et subtripla versus sinistram, et stabunt figurae hoc modo:

234567890
30
100

Quia igitur in ordine triplorum et etiam subtriplorum tantum ultimae sunt significativae, ducas ultimam in ultimam, et 3, qui proventi, ponas supra 3, sub qua est ultima subtriplorum, et stabunt figurae isto modo:

3
234567890
30
100

Quo facto compares ad extremum tres digitos incipiendo a maximo, scilicet a 9; et constat, quod ducendo 9 in ternarium provenit maior numerus quam 23. Item si duxeris 8 in eadem 3, provenit adhuc maior numerus quam 23: ideo neuter eorum est, quem intendis. ⟨Sed⟩ duc 7 in 3, et erit minor 21; 7 igitur erit digitus quaesitus. Deleto ergo 0, quam posuisti sub ultima triplatorum, nunc loco eius ponas 7, et ducas nunc de novo omnes figuras infimas in triplatum, et quod provenit ex ductu, hoc ponas supra multiplicatorem semper ⟨eo⟩ modo, quo dixit quartum praemissorum, et stabunt figurae sic:

321
234567890
30
107

Quo facto duc 7 in productum, et erunt in producto tales

figurae 2247, quibus deletis de sibi suppositis stabunt figurae isto modo:

9867890
30
107

Quo facto reponas subtripla locis suis et digitum nunc inventum sub 7. Sic facto eum ducas in se bis, et productum, scilicet 343, tollas supra, et remanebunt supra figurae tales 9524890. Deinde tripletur 7, et triplum eius ponatur sub 9, et eius subtriplum, scilicet 7, sub eo, et anteriorentur triplata cum suis subtriplis ut prius, et stabunt figurae isto modo:

9524890
321
107

Et tunc ultimo inveniendus est quidam digitus sub prima figura, scilicet sub 0. Ponas igitur sicut prius 0 sub ultima triplatorum, subtriplis ordine, quo sunt, versus sinistram anterioratis, et stabunt figurae sic:

9524890
321
1070

Duc igitur ut prius omnes infimas figuras in medias sicut prius, et stabunt isto modo:

34347
9524890
321
1070

Quo facto compares igitur digitos omnes ad 3, quae est ultima figura producti, et videbis, quod, quemcumque in eum duxeris maiorem quam 3, statim excedetur figura ultima numeri propositi, et si 3, statim aequalis numerus resultat. Sed nunc ducendo eundem in figuras sequentes, maior fiet numerus, et ideo nec 3 erit digitus iste; ergo erit 2. Quo scito ordines subtripla ut prius, et loco figurae 0, quae prius erat sub ultima

triplatorum, ponas eundem 2 sic:

9524890
321
1072

Ducas igitur nunc de novo omnes figuras infimas in medias, et hoc est ducere digitum inventum cum subtriplis in triplata, et provenient istae figurae stantes in supremo ordine:

344112
9524890
3212
107

Quo facto ducas digitum inventum in productum, et erunt in supremo ordine 688224. Quibus detractis de numero proposito remanebunt 2642650. Deinde ducas eundem digitum inventum in se cubice, et productum, scilicet 8, tollas respectu digiti, et remanebunt de toto numero proposito 2642642. Radix autem habetur inventa, si praeponatur digitus ultimo inventus omnibus subtriplis, et erit 1072. Quae si ducatur in se cubice, provenit iste numerus 1231925248, qui est maximus cubicus de toto numero proposito, cui si residuum addideris, redibunt figurae primae 1234567890. Et quod iste sit cubicus maximus illius numeri, probes sic. Radici addas inventae unitatem, et ducas eam in se cubice, et resultabit maior numerus numero proposito, quia resultabit iste 1235376017, qui excedit primum numerum in tanto numero, scilicet 808127; erit igitur numerus extractus, cuius radicem invenisti, maximus cubicus in toto numero proposito.

EXPLICIT.